Contrôle continu - Compléments mathématiques. Durée 1h30.

Exercice 1. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation suivante :

$$(E_1) \qquad 3y^2y' + 2(1-y^3)x = 0 \qquad \text{avec} \;\; y(0) = -1.$$

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$(E_2') \qquad y'' - 6y' + 9y = 9x^2 \qquad \text{et} \qquad (E_2'') \qquad y'' - 6y' + 9y = 2\,\mathrm{e}^{3x}$$

2. En déduire les solutions de

$$(E_2) \qquad y'' - 6y' + 9y = 9x^2 + 2\,\mathrm{e}^{3x}$$

avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1},$$

où a, b, c sont des constantes que vous déterminerez.

2. Déterminer la forme générale des primitives de f sur $]1;+\infty[$ et sur $]-\infty;1[$.
3. On considère l'équation différentielle

$$(E_3) \qquad (x^3-1)y' - 3(x+1)y + 2 = 0.$$

   (a) En utilisant les questions précédentes déterminer la forme générale des solutions de l'équation

$$(E_3') \qquad (x^3-1)z' - 3(x+1)z = 0$$

   sur $]1;+\infty[$ ou sur $]-\infty;1[$.

   (b) En déduire la solution de (E_3) satisfaisant la condition initiale $y(2) = 0$.