Contrôle continu - Compléments mathématiques. Durée 1h30.

Exercice 1. Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation suivante :

$$(E_1) \qquad 3y^2y' + 2(1-y^3)x = 0 \qquad \text{avec } \ y(0) = -1.$$

Réponse. La fonction constante égale à 1 est solution particulière de (E_1) mais ne répond pas à notre problème de Cauchy. On suppose donc que $y \neq 1$. Dans ce cas l'équation à variables séparables devient :

$$(E_1) \iff \left(\frac{3y^2y'}{y^3-1} = 2x\right) \iff \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln|y^3-1|\big) = 2x\right).$$

On en déduit que pour une constante $k \in \mathbb{R}$, $|y^3-1| = \mathrm{e}^{x^2+k}$ et donc que pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}^*$, y est de la forme :

$$y(x) = \sqrt[3]{1+\lambda\,\mathrm{e}^{x^2}} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

Pour satisfaire la condition initiale $y(0) = -1$, on doit prendre $\lambda = -2$ d'où la solution du problème de Cauchy

$$y(x) = \sqrt[3]{1-2\,\mathrm{e}^{x^2}} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$(E_2') \qquad y'' - 6y' + 9y = 9x^2 \qquad \text{et} \qquad (E_2'') \qquad y'' - 6y' + 9y = 2\,\mathrm{e}^{3x}$$

2. En déduire les solutions de

$$(E_2) \qquad y'' - 6y' + 9y = 9x^2 + 2\,\mathrm{e}^{3x}$$

avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

Réponse.

1. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_2^0) \qquad z'' - 6z' + 9z = 0.$$

La recherche de solutions de la forme $z = \mathrm{e}^{rx}$ donne l'équation caractéristique

$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^3 = 0.$$

On en déduit que les solutions de (E_2^0) sont les fonctions z définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$z(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{3x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de (E_2') parmi les fonctions $x \mapsto y_1(x) = ax^2 + bx + c$. En reportant dans (E_2'), il vient :

$$y_1 = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

et donc, en raison du caractère linéaire de (E_2^0), les solutions de (E_2') sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{3x} + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

De même, on cherche une solution particulière de (E_2'') parmi les fonctions $x \mapsto y_2(x) = \alpha x^2 \, \mathrm{e}^{3x}$ (car 3 est racine double de l'équation caractéristique). En reportant dans (E_2''), il vient :

$$y_2 = x^2 \, \mathrm{e}^{3x}$$

et donc, en raison du caractère linéaire de (E_2^0), les solutions de (E_2'') sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = (x^2 + \lambda x + \mu) \, \mathrm{e}^{3x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. La linéarité de (E_2^0) nous dit également que les solution de (E_2) sont les fonctions y de la forme :

$$y(x) = (x^2 + \lambda x + \mu) \, \mathrm{e}^{3x} + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Avec les conditions initiales, on obtient :

$$y(x) = (x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}) \, \mathrm{e}^{3x} + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 1}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1},$$

où a, b, c sont des constantes que vous déterminerez.

2. Déterminer la forme générale des primitives de f sur $]1; +\infty[$ et sur $]-\infty; 1[$.
3. On considère l'équation différentielle

$$(E_3) \qquad (x^3 - 1)y' - 3(x+1)y + 2 = 0.$$

(a) En utilisant les questions précédentes déterminer la forme générale des solutions de l'équation

$$(E_3') \qquad (x^3 - 1)z' - 3(x+1)z = 0$$

sur $]1; +\infty[$ ou sur $]-\infty; 1[$.

(b) En déduire la solution de (E_3) satisfaisant la condition initiale $y(2) = 0$.

Réponse.

1. On trouve $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$ et $c = -\frac{1}{3}$:

$$f(x) = \frac{2}{3\,(x-1)} - \frac{2x+1}{3\,(x^2+x+1)}$$

2. Les primitives F_k de f sont de la forme :

$$F_k(x) = \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x^2+x+1| + k = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right| + k \qquad k \in \mathbb{R}.$$

3. (a) L'équation (E_3') est linéaire sans second membre. La fonction constante égale à 0 est solution, et si $z \neq 0$ et $x \neq 1$, (E_3') et se ramène à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|z| = \frac{z'}{z} = \frac{3(x+1)}{x^3-1} = 3f(x)$$

dont les solutions sont de la forme (d'après les questions 1 et 2), sur $]-\infty;1[$ ou sur $]1;+\infty[$:

$$z(x) = \frac{\lambda(x-1)^2}{x^2+x+1} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

En rajoutant la fonction nulle, on peut considérer que $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque aussi que les solution se prolongent en des solutions sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour obtenir toutes les solutions de (E_3), on utilise la méthode de variation de la constante. On pose

$$z_1(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \quad \text{(solution de } (E_3')) \quad \text{et} \qquad y(x) = \lambda(x)z_1(x).$$

Alors

$$(x^3-1)z_1' - 3(x+1)z_1 = 0 \quad \text{et} \quad y' = \lambda' z_1 + \lambda z_1.$$

Ainsi, y est solution de (E_3) si et seulement si

$$\lambda'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$$

d'où les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \frac{\lambda_0(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1} \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}^*.$$

et avec la condition initiale $y(2) = 0$ on obtient $\lambda_0 = -1$ et

$$y(x) = \frac{2x-x^2}{x^2+x+1}.$$