Examen - Compléments mathématiques. Durée 2h.

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$$(E) \qquad y' + 2xy = (2x+1)\,\mathrm{e}^x.$$
2. Déterminer la solution satisfaisant la condition initiale $y(0) = 0$.

Réponse.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sans second membre $z' + 2xz = 0$ sont de la forme :
$$x \mapsto z(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto y_p(x) = \mathrm{e}^x$. Donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme
$$x \mapsto y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^x \quad \text{pour} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
2. Pour obtenir $y(0) = 0$ on doit prendre $\lambda = -1$ d'où la solution :
$$x \mapsto y(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Exercice 2. Dans le carré $C = [0;1]^2$, on considère les sous-ensembles définis pour $t \in [0;1]$ par
$$F_t = [t;1] \times [0;t], \qquad G_t =]t;1] \times [0;t[$$
ainsi que les sous-ensembles
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}, \quad L' = C \smallsetminus U \quad \text{et} \quad U' = C \smallsetminus L.$$

1. Compléter les expressions suivantes :
$$L' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \cdots \quad \} \qquad U' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \cdots \quad \}.$$
2. Vérifier que $\{L', U', L \cap U\}$ est une partition de $[0;1] \times [0;1]$.
3. Vérifier que
$$\text{(a) } L = \bigcup_{t \in [0;1]} F_t\,; \qquad \text{(b) } U = \bigcap_{t \in [0;1]} (C \smallsetminus G_t).$$

Réponse.

1. $L' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y < x \leqslant 1\}$ et $U' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x < y \leqslant 1\}$.
2. On a : $L' \subset L$, $U' \subset U$ et $L \cap U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x = y \leqslant 1\}$.
Soit $(x,y) \in C$. On a trois cas : soit $x < y$ auquel cas $(x,y) \in U'$, soit $x > y$ auquel cas $(x,y) \in L'$, soit $x = y$ auquel cas $(x,y) \in L \cap U$. Autrement dit,
$$L' \cup U' \cup (L \cap U) = C.$$
En outre, $L' \neq \varnothing$ (e.g. $(1,0) \in L'$), $U' \neq \varnothing$ (e.g. $(0,1) \in U'$), $L \cap U \neq \varnothing$ (e.g. $(0,0) \in L'$) et
$$L' \cap U' = \varnothing \qquad L' \cap (L \cap U) = L' \cap U = \varnothing, \qquad U' \cap (L \cap U) = U' \cap L = \varnothing$$
donc $\{L', U', L \cap U\}$ est une partition de C.

3. Pour tout $t \in [0;1]$, on a
   — $F_t \subset L$: si $(x,y) \in F_t$ alors $0 \leqslant y \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$;
   — $G_t \subset L'$: si $(x,y) \in F_t$ alors $0 \leqslant y < t < x \leqslant 1$.

   Par conséquent, $\displaystyle\bigcup_{t\in[0;1]} F_t \subset L$ et $\displaystyle\bigcup_{t\in[0;1]} G_t \subset L'$.

   Réciproquement, pour $(x,y) \in C$, on pose par exemple $t = \frac{x+y}{2}$. Alors
   — si $(x,y) \in L$ alors $0 \leqslant y \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ donc $(x,y) \in F_t$;
   — si $(x,y) \in L'$ alors $0 \leqslant y < t < x \leqslant 1$ donc $(x,y) \in G_t$.

   Par conséquent, $\displaystyle\bigcup_{t\in[0;1]} F_t = L$ et $\displaystyle\bigcup_{t\in[0;1]} G_t = L'$. Enfin en passant au complémentaire dans C dans la seconde expression, il vient : $U = C \smallsetminus L' = C \smallsetminus \displaystyle\bigcup_{t\in[0;1]} G_t = \bigcap_{t\in[0;1]} (C \smallsetminus G_t)$.

Exercice 3. Soit $f : X \to Y$ une application.

1. Rappeler la définition de $f(A)$ pour $A \subset X$.
2. Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$ pour $B \subset Y$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
4. Montrer que si f est injective alors pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on a $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
5. Montrer la réciproque de la question 4 (indication : considérer le singleton $A = \{x\}$ pour $x \in X$).

Réponse.

1. Pour $A \subset X$, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.
2. Pour $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.
3. Soit $A \in \mathscr{P}(X)$.
   Si $A = \varnothing$, alors $f(A) = \varnothing$ et $f^{-1}\big(f(A)\big) = \varnothing$ donc l'inclusion $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ est vraie dans ce cas.
   Si $A \neq \varnothing$, soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ par définition de $f(A)$ et $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$ par définition de $f^{-1}(B)$ appliqué à $B = f(A)$. Par conséquent $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
4. Supposons f injective. Soit $A \subset X$.
   Si $f^{-1}\big(f(A)\big) = \varnothing$, comme $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$, on a bien $A = f^{-1}\big(f(A)\big) = \varnothing$.
   Si $f^{-1}\big(f(A)\big) \neq \varnothing$, considérons $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Alors par définition de $f^{-1}(B)$ appliqué à $B = f(A)$, on a $f(x) \in f(A)$, donc par définition de $f(A)$, il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on a alors $x = x'$ donc $x \in A$. Ainsi $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$, donc $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.
5. Remarquons que pour tout $x \in X$, on a toujours $f(\{x\}) = \{f(x)\}$. Supposons que pour tout $A \subset X$, $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$. Soient x et x' deux éléments de X tels que $f(x) = f(x')$. Alors

   $$\{x\} = f^{-1}\big(f(\{x\})\big) = f^{-1}\big(\{f(x)\}\big) = f^{-1}\big(\{f(x')\}\big) = f^{-1}\big(f(\{x'\})\big) = \{x'\}$$

   donc $x = x'$. Ce qui montre que f est injective.

Exercice 4. Pour tout couple d'entiers (q,m) tels que $0 \leqslant q \leqslant m$, on note $\mathscr{P}_q(m)$ l'ensemble des parties de $\{1,2,\ldots,m\}$ contenant q éléments.
On fixe des entiers p et n tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ et on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_p(n) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \max(A) \end{array}$$

1. Dans cette question uniquement, on prend $p = 2$ et $n = 4$.
   (a) Préciser pour chaque élément de $\mathscr{P}_2(4)$ son image par f ;
   (b) En déduire $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{4\})$.
2. Déterminer $f\big(\mathscr{P}_p(n)\big)$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{k\})$ pour un entier k tel que $p \leqslant k \leqslant n$, justifier qu'il est en bijection avec $\mathscr{P}_{p-1}(k-1)$ et donner son cardinal.
4. Justifier que les sous-ensembles $f^{-1}(\{k\})$ pour $p \leqslant k \leqslant n$ forment une partition de $\mathscr{P}_p(n)$.
5. En déduire la formule
$$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1}.$$

Réponse.

1. (a) $\mathscr{P}_2(4) = \big\{\{1;2\}, \{1;3\}, \{1;4\}, \{2;3\}, \{2;4\}, \{3;4\}\big\}$.
$$f(\{1;2\}) = 2, \quad f(\{1;3\}) = f(\{2;3\}) = 3, \quad f(\{1;4\}) = f(\{2;4\}) = f(\{3;4\})) = 4.$$
   (b) $f^{-1}(\{2\}) = \big\{\{1;2\}\big\}$,
   $f^{-1}(\{3\}) = \big\{\{1;3\}, \{2;3\}\big\}$,
   $f^{-1}(\{4\}) = \big\{\{1;4\}, \{2;4\}, \{3;4\}\big\}$.
2. $f\big(\mathscr{P}_p(n)\big) = \{p, p+1, \ldots, n\} = \{k \in \mathbb{N} : p \leqslant k \leqslant n\}$.
3. Pour k entier tel que $p \leqslant k \leqslant n$, une partie A a pour image k si elle contient k et si les $p-1$ autres éléments de A sont strictement plus petits que k c'est à dire
$$f^{-1}(\{k\}) = \big\{A = A' \sqcup \{k\} : A' \in \mathscr{P}_{p-1}(k-1)\big\}.$$
L'application $\mathscr{P}_{p-1}(k-1) \to f^{-1}(\{k\})$, $A' \mapsto A' \sqcup \{k\}$ est une bijection de réciproque l'application $A \mapsto A \smallsetminus \{k\}$. Donc
$$\operatorname{card}\big(f^{-1}(\{k\})\big) = \binom{k-1}{p-1}.$$
4. Pour k entier tel que $p \leqslant k \leqslant n$, les sous-ensembles $\{k\}$ sont deux à deux disjoints, contenus dans $f\big(\mathscr{P}_p(n)\big)$ donc forment une partition de $f\big(\mathscr{P}_p(n)\big)$. Par conséquent, les parties $f^{-1}(\{k\})$ pour $p \leqslant k \leqslant n$ forment une partition de $\mathscr{P}_p(n)$ (vu en cours). Autrement dit
   — pour chaque k tel que $p \leqslant k \leqslant n$, $f^{-1}(\{k\}) \neq \varnothing$;
   — si k et ℓ sont deux entiers tels que $p \leqslant k < \ell \leqslant n$, alors
$$f^{-1}(\{k\}) \cap f^{-1}(\{\ell\}) = f^{-1}(\{k\} \cap \{\ell\}) = \varnothing;$$
   — $\mathscr{P}_p(n) = \displaystyle\bigcup_{k=p}^{n} f^{-1}(\{k\})$ d'après 2.
5. Des questions 4 et 3, on déduit immédiatement que :
$$\binom{n}{p} = \operatorname{card}\big(\mathscr{P}_p(n)\big) = \sum_{k=p}^{n} \operatorname{card}\big(f^{-1}(\{k\}\big) \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1}.$$