Math2C
Compléments mathématiques
Licence de mathématiques
1ère année

Université de Bourgogne
Olivier Couture

Table des matières

1 Équations différentielles **5**
1.1 Cadre général . . . 5
1.1.1 Définition à l'ordre 1 . . . 5
1.1.2 Le problème de Cauchy . . . 6
1.1.3 Équations d'ordre supérieur . . . 6
1.2 Équations du premier ordre à variables séparées . . . 7
1.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . 9
1.3.1 Cas d'une équation linéaire sans second membre à coefficient constant . . . 9
1.3.2 Cas d'une équation linéaire sans second membre (ou homogène) . . . 9
1.3.3 Cas général d'une équation linéaire avec second membre . . . 11
1.4 Équation du deuxième ordre à coefficients constants . . . 13
1.4.1 Équation sans second membre (ou homogène) . . . 13
1.4.2 Équation avec second membre . . . 17

2 Théorie des ensembles - Combinatoire **23**
2.1 Un peu de théorie des ensembles . . . 23
2.1.1 Notions de bases . . . 23
2.1.2 Opérations basiques . . . 24
2.1.3 Généralisation des opérations sur les ensembles . . . 26
2.2 Rappels sur les applications . . . 31
2.2.1 Applications, injections, surjections, bijections . . . 31
2.2.2 Applications ensemblistes . . . 32
2.3 Cardinaux et ensembles finis . . . 33
2.3.1 Equipotence, ensemble des entiers naturels et cardinal d'un ensemble . . . 33
2.3.2 Ensembles finis et cardinaux . . . 35
2.3.3 Analyse combinatoire . . . 36

Chapitre 1

Équations différentielles

Les équations différentielles sont fondamentales dans les sciences : ce sont elles qui décrivent l'évolution d'un système, que ce soit en physique, en chimie, en biologie, météorologie...

1.1 Cadre général

1.1.1 Définition à l'ordre 1

Définition 1.1.1: Équation différentielle du premier ordre

On considère un domaine (ouvert) $U \subset \mathbb{R}^3$ et une fonction $F : U \to \mathbb{R}$.
Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}$ d'une variable x, de dérivée y' est ***solution sur un intervalle*** *I de* ***l'équation différentielle du premier ordre***

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (E_1)$$

si pour tout $x \in I$, le point $\big(x, y(x), y'(x)\big) \in U$ et satisfait : $\quad F(x, y(x), y'(x)\big) = 0$.

Remarque 1.1.2

Pour alléger les écritures, on omet de spécifier la variable x de la fonction $x \mapsto y(x)$ dans l'écriture de l'équation différentielle. Ainsi :

$$\text{on écrit} \qquad F(x, y, y') = 0 \qquad \text{au lieu de} \qquad F\big((x, y(x), y'(x)\big) = 0.$$

Exemples 1.1.3

1. La fonction $(x, y_1, y_2) \mapsto F(x, y_1, y_2) = xy_2 + y_1$ est définie sur $\mathbb{R}^3$ et les fonctions $x \mapsto \frac{C}{x}$ sont solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou bien $I = \mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle :

$$F(x, y, y') = xy' + y = 0 \quad \text{pour } x \in I \ .$$

   La fonction constante $y \equiv 0$ est aussi solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. La fonction $(x, y_1, y_2) \mapsto F(x, y_1, y_2) = y_2 - y_1$ est définie sur $\mathbb{R}^3$ et les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^x$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = y' - y = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

3. La fonction $(x, y_1, y_2) \mapsto F(x, y_1, y_2) = y_2^2 + 2x^2y_1^2 - 3xy_1y_2$ est définie sur $\mathbb{R}^3$.
   Les fonctions de la forme $x \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{x^2}$ et $x \mapsto C_2\,\mathrm{e}^{x^2/2}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = y'^2 + 2x^2y^2 - 3xyy' = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

4. La fonction $(x, y_1, y_2) \mapsto F(x, y_1, y_2) = y_2 - \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et les fonctions $x \mapsto C_1 + \ln x$ sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $x \mapsto C_2 + \ln(-x)$ sont solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = y' - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Fin du cours 1

Remarque 1.1.4

1. Les solutions d'une équation différentielle sont des **fonctions**, définies sur un certain intervalle I. Comme le montre le dernier exemple, chercher une primitive d'une fonction f, c'est résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$. C'est pourquoi on parle d'**intégrer** une équation différentielle lorsqu'on cherche les solutions.
2. Dans la pratique, on ne donne souvent l'intervalle I d'une solution qu'*a posteriori*, les conditions à imposer à x apparaissant au cours de la résolution de l'équation. On essaie de déterminer l'intervalle le plus grand possible sur lequel on peut écrire la solution – on parle alors de **solution maximale**.
3. Si la fonction $x \mapsto y(x)$, $x \in I$ est solution de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, on dit aussi que la courbe représentant la fonction $x \mapsto y(x)$ dans $I \times \mathbb{R}$ est **courbe solution** ou **courbe intégrale**.

1.1.2 Le problème de Cauchy

Définition 1.1.5: Problème de Cauchy

*On appelle **problème de Cauchy** d'une équation différentielle du premier ordre $F(x, y, y') = 0$ la recherche d'une solution y satisfaisant une **condition initiale** $y(x_0) = y_0$.*

Lorsque c'est possible, on écrit souvent une équation différentielle sous la forme :

$$y' = f(x, y).$$

Sous certaines hypothèses de régularité de la fonction f, par exemple lorsque, à x fixé, la dérivée de f par rapport à y ne s'annule pas, **les courbes intégrales sont deux à deux disjointes** autrement dit :

par un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, passe **au plus une courbe solution**.

Dans ce cas le problème de Cauchy admet une unique solution à proximité du point (x_0, y_0) défini par la condition initiale.

1.1.3 Équations d'ordre supérieur

Définition 1.1.6: Équations différentielles d'ordre supérieur

*On considère U un domaine (ouvert) de $\mathbb{R}^{p+1}$ et une fonction $F : U \to \mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction p fois dérivable $y : I \to \mathbb{R}$ d'une variable x, de dérivées successives $y', y'', \ldots, y^{(p)}$ est **solution sur** I de **l'équation différentielle d'ordre** p*

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(p)}\big) = 0 \qquad (E_p)$$

si pour tout $x \in I$, $\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(p)}(x)\big) \in U$ et $F\Big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(p)}(x)\Big) = 0$.

Exemples 1.1.7

1. $y'' + y = 0$ est du second ordre et admet $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ comme solutions sur $\mathbb{R}$.
2. $yy'' + y'^2 = 3x$ est du second ordre et admet $x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problème de Cauchy
Pour des équations d'ordre n, le problème de Cauchy consite à trouver une solution (unique si possible) avec n conditions initiales portant par exemple sur les dérivées successives

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = d_1, \quad y''(x_0) = d_2, \quad \dots \quad y^{n-1}(x_0) = d_{n-1}$$

ou alors avec plusieurs points (n points) :

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad y(x_3) = y_3, \quad \dots \quad y(x_n) = y_n.$$

Exemples 1.1.8

1. L'unique solution de $y'' + 9y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ est :

$$x \mapsto 2\cos 3x + \sin 3x.$$

2. L'unique solution de $y'' + 9y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ est :

$$x \mapsto 2\cos 3x + 2\sin 3x.$$

1.2 Équations du premier ordre à variables séparées

Définition 1.2.1: Équations du premier ordre à variables séparées

Une équation différentielle du premier ordre est dite ***à variables séparées*** *si elle peut la mettre sous la forme :*

$$y' \times g(y) = f(x)$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur des intervalles I et J.

Méthode de résolution.
Soient F et G des primitives de f et g sur I et J. Calculons la dérivée de la fonction composée

$$x \mapsto G\big(y(x)\big) = G \circ y(x)$$

pour une fonction dérivable $y : I \to J$:

$$\Big(G(y(x))\Big)' = g\big(y(x)\big)y'(x) \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\mathrm{d}G \circ y}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}\big(y(x)\big)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = g\big(y(x)\big)y'(x)$$

Ainsi, on peut réécrire l'équation différentielle pour $x \in I$:

$$y' \times g(y) = f(x) \qquad \text{devient} \qquad \Big(G\big(y(x)\big)\Big)' = F'(x).$$

Or on intègre facilement cette dernière équation : il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I \qquad G(y(x)) = F(x) + C$$

On est ramené à trouver le réciproque de G sur un intervalle approprié contenu dans J sur lequel G est injective.

Exemples 1.2.2

1. Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y' = \mathrm{e}^{x+y}\,.$$

Cette équation peut se mettre la forme : $y'\,\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^{x}$ c'est à dire $(-\,\mathrm{e}^{-y(x)})' = \mathrm{e}^{x}$. En intégrant il vient

$$\mathrm{e}^{-y(x)} = -\,\mathrm{e}^{x} + C \quad \text{avec } C > 0$$

c'est à dire $y(x) = -\ln(C - \mathrm{e}^{x})$ définie sur $]-\infty; \ln C[$. L'unique solution dont la courbe

passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) est $y = -\ln(\mathrm{e}^{-y_0} + \mathrm{e}^{x_0} - \mathrm{e}^{x})$. La solution passant dont la courbe passe par l'origine est $y = -\ln(2 - \mathrm{e}^{x})$, définie pour $x < \ln 2$.

2. Soit à résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y' = 1 + y^2.$$

On voit que x ne peut pas s'annuler. Cette équation prend la forme :

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{c'est à dire} \quad \Big(\arctan y(x)\Big)' = \frac{1}{x^2}.$$

En intégrant il vient

$$\arctan y(x) = -\frac{1}{x} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

c'est à dire

$$y(x) = \tan(C - \frac{1}{x})$$

solution dérivable sur tout intervalle de la forme :

$$I_k = \left]\frac{2}{2C-(2k-1)\pi}; \frac{2}{2C-(2k+1)\pi}\right[\qquad k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{k_C\}$$

ou un des deux intervalles

$$I^-_{k_C} = \left]\frac{2}{C-(2k_C-1)\pi}; 0\right[\quad \text{ou} \quad I^+_{k_C} = \left]0; \frac{2}{C-(2k_C-1)\pi}\right[$$

où k_C est la partie entière de $\frac{C}{\pi} + \frac{1}{2}$. En particulier, la solution dont la courbe passe par le point (x_0, y_0) $(x_0 \neq 0)$ est :

$$y(x) = \tan\left(\arctan(y_0) + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right) = \frac{y_0 + \tan\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right)}{1 - y_0 \tan\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right)}.$$

Cas particulier.
Dans les équations aux variables séparées, on trouve le cas particulier $y' = h(y)$, où $h : I \to \mathbb{R}$ est continue Si h ne s'annule pas sur I, alors la fonction $1/h$ garde un signe constant sur I. On en déduit que toute primitive F de $1/h$ est monotone donc injective, donc on peut trouver une réciproque de F. Les solutions sont alors données par $y = F^{-1}(x - x_0)$ où H est une primitive de $1/h$.

Exemple 1.2.3

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y' = ay.$$

La fonction h est : $h(y) = ay$, qui ne s'annule pas en dehors de 0. Ainsi, on trouve les solutions suivantes :

— pour $y > 0$, $\dfrac{y'}{y} = a$ donc $\ln y = a(x - x_0)$ pour $x \in \mathbb{R}$
c'est à dire
$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \qquad \text{en posant } C = \mathrm{e}^{ax_0} > 0$$

— pour $y < 0$, $\dfrac{y'}{y} = a$ donc $\ln(-y) = a(x - x_0)$ pour $x \in \mathbb{R}$
c'est à dire
$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \qquad \text{en posant } C = -\,\mathrm{e}^{ax_0} < 0.$$

— Reste le cas où la fonction y est constante égale à 0, ce qui correspond à la constante $C = 0$ des cas précédents.

Ce dernier exemple est le cas de la résolution d'**une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre (on dit aussi homogène) à coefficient constant.**

1.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 1.3.1: Équation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle ***linéaire du premier ordre*** *est une équation qui peut se mettre de la forme :*

$$y' - a(x)y = b(x)$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. La fonction b est appelée «second membre de l'équation», $y' - a(x)y$ est la «partie homogène», la fonction a est «le coefficient de l'équation».

1.3.1 Cas d'une équation linéaire sans second membre à coefficient constant

On vient de voir dans le paragraphe précédent que les solutions de

$$y' = ay$$

sont de la forme $y = C\,\mathrm{e}^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$ avec C une constante arbitraire. Remarquons que par tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ passe l'unique courbe solution représentant la fonction $y = y_0\,\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$. Pour être tout à fait rigoureux, **il faut encore vérifier que ce sont bien les seules solutions**. Pour cela, on pose $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$. Alors on a l'équivalence des équations :

$$(y' = ay) \iff \Big(\big(\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\big)' = a\,\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\Big) \iff \Big(a\,\mathrm{e}^{ax}\,z(x) + \mathrm{e}^{ax}\,z'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax}\,z(x)\Big) \iff (z' = 0)$$

Ainsi y est solution de l'équation $y' = ay$ si et seulement si z est constante sur $\mathbb{R}$. En notant $C \in \mathbb{R}$ cette constante, il vient que $y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$, ce qu'on voulait obtenir.

Remarquons en passant que

1. la fonction constamment nulle est solution
2. par tout point, passe une et une seule courbe solution : en d'autres termes les solutions forment une partition du plan.
3. l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est un sous espace vectoriel de dimension 1 de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$$\mathscr{S} = \{Cy_1 : C \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{y_1\}$$
où y_1 est la fonction définie par $y_1(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

Fin du cours 2

1.3.2 Cas d'une équation linéaire sans second membre (ou homogène)

Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. L'équation

$$y' = a(x)y$$

On remarque que la fonction nulle est solution. Cette équation est un cas particulier d'équation à variables séparées. La résolution de consiste à chercher les solutions qui ne s'annulent pas :

$$\frac{y'}{y} = a(x).$$

On reconnaît à gauche la dérivée de $\ln|y(x)|$. Ainsi, si $A : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de a, on peut écrire, en intégrant chaque membre :

$$\ln|y(x)| = A(x) + k$$

où k est une constante et donc on obtient des solutions de la forme

$$y = C\,\mathrm{e}^{A(x)} \qquad C = \pm\,\mathrm{e}^{k} \in \mathbb{R}^*.$$

On peut rajouter la solution constamment nulle en posant $C = 0$. Pour une démonstration plus rigoureuse, montrant que ce sont bien toutes les solutions que l'on a trouvé, on procède comme dans le paragraphe précédent : on pose $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$. Alors on a l'équivalence des équations pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}(y' = a(x)y) &\iff \Big(\big(\mathrm{e}^{A(x)}\,z(x)\big)' = a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,z(x)\Big)\\ &\iff \Big(a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,z(x) + \mathrm{e}^{A(x)}\,z'(x) = a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,z(x)\Big)\\ &\iff (z' = 0).\end{aligned}$$

Ainsi y est solution sur I si et seulement si z est constante. Si on note $C \in \mathbb{R}$ cette constante, il vient que $y(x) = C\,\mathrm{e}^{A(x)}$, ce qu'on voulait obtenir. La solution dont la courbe passe par $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ est : $x \mapsto y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{A(x)-A(x_0)}$. On a alors :

Proposition 1.3.2: Solutions d'une équation linéaire sans second membre

Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y \qquad (x \in I)$$

sont les fonctions y définies par :

$$\forall x \in I \qquad y(x) = C\,\mathrm{e}^{A(x)}$$

où A est une primitive de a sur I. Ces solutions forment un sous espace vectoriel de dimension 1 de l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, dont la fonction $x \mapsto y_1(x) = \mathrm{e}^{A(x)}$ est une base. Par tout point $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, passe une unique courbe solution représentant la fonction :

$$x \mapsto y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{A(x)-A(x_0)}\,.$$

Exemple 1.3.3

Résolution de l'équation $x(1+x)y' = y$.
Pour $x \in I$, où I est l'un des trois intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$, $]0; +\infty[$, cette équation se met sous la forme

$$y' = a(x)y \quad \text{avec} \quad a(x) = \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}.$$

Or $a : I \to \mathbb{R}$ a pour primitive $A(x) = \ln|x| - \ln|1+x| = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right|$. Donc les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|} \qquad x \in I$$

où C une constante arbitraire. On peut encore écrire

$$y(x) = \frac{\lambda x}{1+x} \qquad x \in I$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Remarque 1.3.4

On voit sur cet exemple qu'en fait on peut regrouper les intervalles $]-1; 0[$ et $]0; +\infty[$ en un seul $]-1; +\infty[$, les solutions se prolongeant de façon $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) en 0 (ce qu'on ne pouvait pas deviner au préalable).

Cependant le point de coordonnées $(0, 0)$ est très particulier (on dit que c'est un **point singulier**) puisque toutes les solutions définies sur $]-1; +\infty[$ passent par ce point ; le problème de Cauchy en $(0, 0)$ a une infinité de solutions. Par tout autre point (x_0, y_0) avec $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq -1$, le problème de Cauchy en (x_0, y_0) a une unique solution.

1.3.3 Cas général d'une équation linéaire avec second membre

Soit à résoudre l'équation $y' = a(x)y + b(x)$. Admettons que l'on connaisse une solution particulière $y_0(x)$ c'est à dire $y_0' = a(x)y_0 + b(x)$. Alors posons $z = y - y_0$. On a l'équivalence des équations

$$\begin{aligned}\big(y' = a(x)y + b(x)\big) &\iff \big((z + y_0)' = a(x)(z + y_0) + b(x)\big)\\ &\iff \big(z' = a(x)z + a(x)y_0 + b(x) - y_0'\big)\\ &\iff \big(z' = a(x)z\big)\end{aligned}$$

Ainsi, y **est solution de l'équation avec second membre si et seulement si** z **est solution de l'équation sans second membre**. On en déduit :

Proposition 1.3.5: Résolution d'une équation linéaire du premier ordre

Soit $(E) : y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle du premier ordre où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont continues. Si y_0 est une solution particulière de (E) sur I , alors toutes les solutions de (E) sur I sont de la forme

$$y(x) = y_0(x) + z(x)$$

où z est solution de l'équation sans second membre $(E') : z' = a(x)z$.
En d'autres termes si A est une primitive de a sur I, les solutions de (E) sur I sont de la forme

$$y(x) = y_0(x) + C\,\mathrm{e}^{A(x)} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.3.6

Résolution de l'équation $(E) : x(1 + x)y' = y + x^2$.
On a vu que les solutions de $(E_0) : x(x + 1)z' = z$ sont de la forme

$$z(x) = \frac{\lambda x}{1 + x} \qquad x \in I$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et I l'un des trois intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
On voit facilement que la fonction $x \mapsto y_0(x) = x$ est solution particulière. On pose alors

$$z(x) = y(x) - x.$$

On a donc

$$\big(x(1 + x)y' = y + x^2\big) \iff \big(x(1 + x)(z + x)' = z + x + x^2\big) \iff \big(x(x + 1)z' = z\big).$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme $\quad y(x) = \dfrac{\lambda x}{1 + x} + x \quad x \in I$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Souvent, il n'est pas évident de trouver une solution particulière. Dans ce cas on peut appliquer la méthode de **variation de la constante**.

Proposition 1.3.7: Méthode de variation de la constante.

Soit $(E) : y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle du premier ordre où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont continues. Soit $(E_0) : z' = a(x)z$ l'équation sans second membre associée, de solution générale

$$z(x) = \lambda_0\,\mathrm{e}^{A(x)} \qquad x \in I$$

où A est une primitive de a sur I et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.
On remplace la constante λ_0 par une fonction : on pose $y(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Alors y est solution de (E) si et seulement si λ est une primitive de $x \mapsto b(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ sur I.

Démonstration. *Pour $x \in I$, on pose $y(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et A est une primitive de a. Alors*

$$\big(y' = a(x)y + b(x)\big) \iff \Big(\lambda'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + a(x)\lambda(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = a(x)\lambda(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + b(x)\Big)$$
$$\iff \Big(\lambda'(x) = b(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}\Big)$$

□

Exemple 1.3.8

Résolution de l'équation $(E) : x(1+x)y' = y + x$.
Dans cet exemple, il n'est pas évident de trouver une solution particulière. On a vu que les solutions $x \mapsto z(x)$ de l'équation sans second membre $(E_0) : x(x+1)z' = z$ sont de la forme

$$z(x) = \frac{\lambda_0 x}{1+x} \qquad x \in I$$

où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est une constante et I l'un des trois intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$ ou $]0; +\infty[$.
Dans ce cas, pour trouver la solution générale de l'équation (E) avec second membre, on fait varier la constante λ_0 : on pose

$$y(x) = \lambda(x)\frac{x}{1+x} \qquad x \in I$$

où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable. On a pour $x \in I$

$$y'(x) = \lambda'(x)\frac{x}{1+x} + \lambda(x)\Big(\frac{x}{1+x}\Big)' = \lambda'(x)\frac{x}{1+x} + \lambda(x)\frac{1}{(1+x)^2}$$

donc

$$\big(x(1+x)y' = y + x\big) \iff \Big(x^2\lambda'(x) + \lambda(x)\frac{x}{1+x} = \lambda(x)\frac{x}{1+x} + x\Big) \iff \Big(\lambda'(x) = \frac{1}{x}\Big)$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme

$$y(x) = (\ln|x| + \lambda_0)\frac{x}{1+x} \qquad x \in I$$

où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est une constante et I un des trois intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$ ou $]0; +\infty[$. On retrouve la solution comme somme de

— la solution générale de l'équation sans second membre $(E_0) : z(x) = \dfrac{\lambda_0 x}{1+x}$
— une solution particulière de (E) (lorsque $\lambda_0 = 0$) : $y_0(x) = \frac{x \ln|x|}{1+x}$

Nota Bene **Théorème de Cauchy-Lipschitz**

Soit (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

$$(E) : \qquad y' = a(x)y + b(x)$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont continues.
Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) ; c'est la somme d'une solution particulière s'annulant en x_0 et de la solution de l'équation sans second membre avec conditions initiales (x_0, y_0) :

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t + y_0\,\mathrm{e}^{-A(x_0)}\Big)\,\mathrm{e}^{A(x)} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t \times \mathrm{e}^{A(x)}}_{\text{sol. particulière nulle en } x_0} + \underbrace{y_0\,\mathrm{e}^{A(x)-A(x_0)}}_{\substack{\text{sol. en } (x_0,y_0) \text{ de} \\ \text{l'éq. sans 2nd membre}}}$$

Fin du cours 3

1.4 Équation du deuxième ordre à coefficients constants

Définition 1.4.1: Équation différentielle linéaire du deuxième ordre

Une équation différentielle ***linéaire du deuxième ordre*** *est une équation qui peut se mettre de la forme :*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La fonction d est appelée «second membre de l'équation», $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$ est la «partie homogène», les fonctions a, b, c sont «les coefficients de l'équation».

On ne s'intéresse ici qu'au cas de coefficients constants a, b, c avec $a \neq 0$.

1.4.1 Équation sans second membre (ou homogène)

On suppose ici que la fonction d est nulle. Considérons l'équation

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

Lemme 1.4.2: Espace vectoriel des solutions

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. *Il suffit de remarquer qu'on a les implications*

$$\big(ay'' + by' + cy = 0 \quad et \quad \lambda \in \mathbb{R}\big) \implies \big(a(\lambda y)'' + b(\lambda y)' + c(\lambda y) = 0\big)$$

et

$$\big(ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \quad et \quad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0\big) \implies \big(a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = 0\big).$$

donc $\mathscr{S}$ est stable par multiplication par un scalaire et par addition des fonctions. □

Remarque 1.4.3

1. On peut aussi vérifier que l'ensemble $\mathscr{S}_{\mathbb{C}}$ des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

   est un sous espace vectoriel **complexe** (les scalaires sont complexes dans ce cas) de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

2. On peut même étendre la résolution au cas des équations différentielles complexes

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C} \quad a \neq 0.$$

Méthode de résolution.
On cherche des solutions (éventuellement à valeurs dans $\mathbb{C}$) sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$. On obtient l'équation :

$$\mathrm{e}^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad i.e. \quad \boxed{ar^2 + br + c = 0}.$$

Cette dernière équation est appelée **équation caractéristique** de (E). On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. On a trois cas de figure :

1. $\Delta > 0$: dans ce cas on obtient deux racines **réelles** de l'équation caractéristique

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- On a donc deux solutions de (E) :

$$y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x} \qquad \text{et} \qquad y_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}.$$

- Ces deux solutions sont linéairement indépendantes car les deux fonctions ne sont pas proportionnelles (car $r_1 \neq r_2$). On obtient un sous espace de solutions de dimension 2 :

$$\mathrm{Vect}\{y_1, y_2\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

- Montrons que $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{y_1, y_2\}$, autrement dit **toute solution est de la forme :**

$$\boxed{x \mapsto y(x) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x}} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Remarque 1.4.4

En général en physique, on trouve ce genre de solution pour un frottement assez fort. La variable x représente le temps, r_1 et r_2 sont négatifs et y est donc un signal (fortement) amorti.

<u>Démonstration.</u> *On fait varier une des constantes : posons $y(x) = \lambda(x) y_1(x)$ où $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ avec $ar_1^2 + br_1 + c = 0$. En remarquant que $y_1' = r_1 y_1$, on a*

$$y' = \lambda' y_1 + \lambda y_1' = (\lambda' + r_1 \lambda) y_1 \quad \text{et} \quad y'' = \lambda'' y_1 + 2\lambda' y_1' + \lambda y_1'' = (\lambda'' + 2\lambda' r_1 + \lambda r_1^2) y_1.$$

Ainsi comme y_1 ne s'annule pas

$$\begin{aligned}(y \in \mathscr{S}) \iff \Big(ay'' + by + c = 0\Big) &\iff \Big(a(\lambda'' + 2\lambda' r_1 + \lambda r_1^2) y_1 + b(\lambda' + r_1 \lambda) y_1 + c\lambda y_1 = 0\Big) \\ &\iff \Big(a\lambda' y_1' + 2a\lambda' r_1 y_1 + b\lambda' y_1 = 0\Big) \\ &\iff \Big(a\lambda'' + (2ar_1 + b)\lambda' = 0\Big)\end{aligned}$$

En posant $\mu = \lambda'$, et en remarquant que $\frac{r_1+r_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, on trouve une équation du premier ordre à coefficient constant

$$\mu' + (r_1 - r_2)\mu = 0$$

qui a pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda'(x) = \mu(x) = \mu_0 \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x}$$

d'où, en intégrant et en posant $\lambda_2 = \dfrac{\mu_0}{r_2 - r_1}$: $\quad \lambda(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x}$.
Ainsi les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$x \mapsto y(x) = \lambda(x) y_1(x) = \Big(\lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x}\Big) \mathrm{e}^{r_1 x} = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x}.$$

qui sont les éléments de $\mathrm{Vect}\{y_1, y_2\}$. Autrement dit, $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{y_1, y_2\}$. □

Fin du cours 4

2. $\Delta < 0$: dans ce cas on obtient deux racines **complexes conjuguées**

$$r_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On pose pour simplifier : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\quad (r_1 = \alpha + \mathrm{i}\omega$ et $r_2 = \bar{r}_1 = \alpha - \mathrm{i}\omega)$.

- On donc deux solutions conjuguées de (E) :

$$z_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{e}^{i\omega x} \qquad \text{et} \qquad z_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,.$$

En remarquant que si z est solution complexe de (E) alors $y_1 = \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = \frac{z_1+z_2}{2}$ et $y_2 = \mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_2) = \frac{z_1-z_2}{2\mathrm{i}}$ aussi, on obtient deux solutions **réelles**

$$y_1 : x \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{r_1 x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x) \qquad \text{et} \qquad y_2 : x \mapsto \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{r_2 x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\omega x).$$

- Comme précédemment, ces deux solutions sont linéairement indépendantes car les deux fonctions ne sont pas proportionnelles. On obtient un sous espace de solutions de dimension 2 :

$$\mathrm{Vect}\{y_1, y_2\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

- On montre maintenant que $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{y_1, y_2\}$, autrement dit **toute solution est de la forme :**

$$\boxed{x \mapsto y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(\lambda_1\cos(\omega x) + \lambda_2\sin(\omega x)\big)}.$$

Remarque 1.4.5

Si on pose $\lambda = |\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ et $\varphi = \arg(\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2)$ (c'est à dire $\lambda_1 = \lambda\cos\varphi$ et $\lambda_2 = -\lambda\sin\varphi$) on peut écrire

$$\lambda_1\cos(\omega x) + \lambda_2\sin(\omega x) = \lambda\cos(\varphi)\cos(\omega x) - \lambda\sin(\varphi)\sin(\omega x) = \lambda\cos(\omega x + \varphi)$$

Les solutions peuvent donc s'écrire indifféremment sous les deux formes

$$\boxed{x \mapsto y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x + \varphi) = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(\lambda_1\cos(\omega x) + \lambda_2\sin(\omega x)\big)}.$$

En général en physique, x représente le temps, $\alpha < 0$ et donc $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est un facteur d'amortissement dû à un frottement faible, ω est une fréquence (ou pulsation), et φ un déphasage.

<u>Démonstration.</u> *La démonstration de $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{y_1, y_2\}$ peut se faire comme précédemment (cas $\Delta > 0$) en utilisant la méthode de variation de la constante : on cherche par exemple des solutions de la forme*

$$y = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x).$$

On peut aussi utiliser les fonctions complexes et chercher les solutions de la forme

$$z(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{r_1 x}$$

plus faciles à manipuler. Dans ce cas, on montre que l'espace des solutions complexes est $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}\{z_1, z_2\}$ et donc que l'espace des solutions réelles est

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Im}(z_1)\} = \mathrm{Vect}\{y_1, y_2\}.$$

Les détails de la démonstration sont laissés en exercice. □

3. $\Delta = 0$: dans ce cas on obtient une racine réelle double

$$r_1 = -\frac{b}{2a}.$$

- On a donc une seule solution de (E) :

$$y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x} \qquad (\text{remarquons que } y_1' = r_1 y_1 \quad i.e. \quad 2ay_1' = -by_1.).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}\{y_1\} = \{\lambda y_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de solutions de dimension 1.

- $\mathrm{Vect}\{y_1\} \subset \mathscr{S}$, mais en fait cette inclusion est stricte. On cherche toutes les solutions par méthode de variation de la constante.
  On pose $y(x) = \lambda(x)y_1(x)$. On a $y' = \lambda y_1' + \lambda' y_1$ et $y'' = \lambda y_1'' + 2\lambda' y_1' + \lambda'' y_1$.

$$\begin{aligned}\Big(ay'' + by' + cy = 0\Big) &\iff \Big(a(\lambda y_1'' + 2\lambda' y_1' + \lambda'' y_1) + b(\lambda y_1' + \lambda' y_1) + c\lambda y_1 = 0\Big)\\ &\iff \Big((2ay_1' + by_1)\lambda' + ay_1\lambda'' = 0\Big)\\ &\iff \big(ay_1\lambda'' = 0\big)\end{aligned}$$

  Or y_1 ne s'annule jamais. Il vient : $\big(ay'' + by' + cy = 0\big) \iff \big(\lambda'' = 0\big)$.
  Cette dernière équation s'intègre en $\lambda(x) = \lambda_2 x + \lambda_1$ d'où les solutions de la forme

$$\boxed{y(x) = (\lambda_2 x + \lambda_1)\,\mathrm{e}^{r_1 x}}.$$

Remarque

En physique, généralement $r_1 < 0$ et ce cas correspond à une situation critique intermédiaire entre les deux précédents.

On retrouve la solution $y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ et on remarque ici que $y_2 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{r_1 x}$ est une autre solution de (E) et que

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\{y_1; y_2\} = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Remarques 1.4.6

1. En utilisant les fonctions cosinus et sinus hyperboliques

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{e}^x = \cosh x + \sinh x \qquad \mathrm{e}^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

   on peut réécrire les solutions de (E) dans le cas où $\Delta > 0$ de façon analogue au cas où $\Delta < 0$:

$$y(x) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{r_2 x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(\mu_1 \cosh(\omega x) + \mu_2 \sinh(\omega x)\big)$$

   où $\alpha = \frac{r_1+r_2}{2}$, $\omega = \frac{r_1-r_2}{2}$, $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_1 - \lambda_2$.
2. **Conditions initiales : résolution du problème de Cauchy**.
   On peut trouver une unique solution dont la courbe passe par (x_0, y_0) avec la condition $y'(x_0) = v_0$. Pour trouver cette solution $x \mapsto y(x)$, on considère les solutions y_1 et y_2 formant une base de solutions dans les trois cas précédents : dans chacun des cas on constate que $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ ne s'annule jamais :
   — Cas $\Delta > 0$: si $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ alors $y_1 y_2' - y_2 y_1' = (r_2 - r_1)\,\mathrm{e}^{(r_1+r_2)x} \neq 0$
   — Cas $\Delta < 0$: si $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x)$ et $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\omega x)$ alors $y_1 y_2' - y_2 y_1' = \omega\,\mathrm{e}^{2\alpha x} \neq 0$
   — Cas $\Delta = 0$: si $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $y_2 = x\,\mathrm{e}^{r_1 x}$ et alors $y_1 y_2' - y_2 y_1' = \mathrm{e}^{2r_1 x} \neq 0$
   donc on peut toujours trouver d'uniques constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = y_0 \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

   Ainsi $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ satisfait les conditions initiales.
3. Si $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) alors $x \mapsto y(x - x_0)$ aussi. Cela permet de ramener aux conditions initiales en 0 plutôt que x_0. C'est bien plus pratique pour adapter les constantes.

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 1.4.7

1. *L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle*

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. *Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $v_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution y de (E) dont la courbe passe par (x_0, y_0) (i.e. $y(x_0) = y_0$) avec la condition $y'(x_0) = v_0$.*

Exemples 1.4.8

1. Soit à résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec condition initiale $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$ donc les solutions sont de la forme

$$y(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{x} + \mu\, \mathrm{e}^{2x}$$

Les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$ donnent

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 2\mu = -1 \end{cases} \qquad i.e. \qquad \lambda = 5 \quad \text{et} \quad \mu = -3$$

d'où

$$y(x) = 5\, \mathrm{e}^{x} - 3\, \mathrm{e}^{2x}$$

2. Soit à résoudre $y'' + 2y' + 4y = 0$ avec condition initiale $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 4 = 0$. Les racines sont $r_1 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $r_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ donc les solutions sont de la forme

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} \left(\lambda \cos(\sqrt{3}x) + \mu \sin(\sqrt{3}x) \right)$$

Les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$ donnent $\lambda = y_0$ et $\sqrt{3}\mu - \lambda = v_0$ d'où

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} \left(y_0 \cos(\sqrt{3}x) + \frac{\sqrt{3}(v_0 + y_0)}{3} \sin(\sqrt{3}x) \right).$$

3. Soit à résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec condition initiale $y(1) = y_1$ et $y'(1) = v_1$. L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$. L'unique racine double est $r = -2$ donc les solutions sont de la forme

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\, \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Pour des conditions initiales en 1 au lieu de 0, mieux vaut donner $y(x)$ sous la forme

$$y(x) = \big(\alpha(x-1) + \beta\big)\, \mathrm{e}^{-2(x-1)}\,.$$

Les conditions initiales $y(1) = y_1$ et $y'(1) = v_1$ donnent alors $\beta = y_1$ et $\alpha - 2\beta = v_1$ d'où

$$y(x) = \big((v_1 + 2y_1)(x-1) + y_1\big)\, \mathrm{e}^{-2(x-1)}\,.$$

Fin du cours 5

1.4.2 Équation avec second membre

La situation suivante est analogue au cas des équations du premier ordre. Soit à résoudre l'équation avec second membre

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d(x).$$

Admettons que l'on connaisse une solution particulière $y_0(x)$ c'est à dire $ay_0'' + by_0' + cy_0 = d(x)$. Alors posons $z = y - y_0$. On a l'équivalence des équations

$$\begin{aligned}\big(ay'' + by' + cy = g(x)\big) &\iff \big(a(z+y_0)'' + b(z+y_0)' + c(z+y_0) = d(x)\big)\\ &\iff \big(az'' + bz' + cz + ay_0'' + by_0' + cy_0 = d(x)\big)\\ &\iff \big(az'' + bz' + cz = 0\big)\end{aligned}$$

Ainsi, y **est solution de l'équation avec second membre si et seulement si** z **est solution de l'équation sans second membre**. On en déduit :

Proposition 1.4.9

Soit (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$ une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants a, b, c $(a \neq 0)$ avec second membre $d : I \to \mathbb{R}$ continue.
Si $x \mapsto y_0(x)$ est une solution particulière de (E) sur I , alors toutes les solutions de (E) sur I sont de la forme

$$y(x) = y_0(x) + z(x)$$

où z est solution de l'équation sans second membre (E_0) : $az'' + bz' + cz = 0$.

Exemple 1.4.10

Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(E) \qquad y'' - 5y' + 6y = 12x.$$

On cherche une solution particulière $y_0(x) = ax + b$ de même nature que $d(x) = 12x$. On doit avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y_0''(x) - 5y_0'(x) + 6y_0(x) = -5a + 6ax + 6b = 12x$$

donc $a = 2$ et $b = \frac{5}{3}$ c'est à dire $y_0(x) = 2x + \frac{5}{3}$. On pose $z = y - y_0$. Alors y est solution de (E) si et seulement si z est solution de

$$(E_0) \qquad z'' - 5z' + 6z = 0.$$

Cette équation différentielle homogène (E_0) a pour équation caractéristique

$$r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0.$$

Ainsi, les solutions de (E_0) sont les fonctions z de la forme :

$$z(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{2x} + \mu\, \mathrm{e}^{3x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$y(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{2x} + \mu\, \mathrm{e}^{3x} + 2x + \frac{5}{3} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Remarques 1.4.11: Recherche de solutions particulières

Pour trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d(x)$$

d'équation homogène associée (E_0) $\quad az'' + bz' + cz = 0$ on peut appliquer les règles suivantes :

1. Si $d(x) = d_1(x) + d_2(x)$, on cherche une solution particulière pour chacune des équations

$$(E_1) \qquad ay'' + by' + cy = d_1(x) \qquad \text{et} \qquad (E_2) \qquad ay'' + by' + cy = d_2(x)$$

   on obtient une solution de (E) en faisant la somme de ces deux solutions particulières.

2. Si d est un polynôme de degré k, alors il existe une solution particulière qui est un polynôme de degré k.
3. Si d est de la forme $d(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ où P est un polynôme de degré k, alors il existe une solution particulière de la forme
$$y_0(x) = x^\ell Q(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$
où Q est un polynôme de degré k et :
   (a) $\ell = 0$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E_0) ;
   (b) $\ell = 1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique de (E_0) ;
   (c) $\ell = 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique de (E_0).
4. Si d est de la forme $d(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x)+P_2(x)\sin(\beta x)\big)$ où P_1 et P_2 sont des polynômes de degré k_1 et k_2, alors il existe une solution particulière de la forme
$$y_0(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(x^\ell Q_1(x)\cos(\beta x) + x^\ell Q_2(x)\sin(\beta x)$$
où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de degré $k = \max\{k_1, k_2\}$ et :
   (a) $\ell = 0$ si $\alpha + \mathrm{i}\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (E_0) ;
   (b) $\ell = 1$ si $\alpha + \mathrm{i}\beta$ est racine simple de l'équation caractéristique de (E_0) ;
5. **Méthode de variation des constantes**. Soit $\{z_1, z_2\}$ une base de solutions de l'équation homogène (E_0). Alors on cherche une solution particulière y_0 sous la forme
$$y_0(x) = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2(x)y_2(x)$$
où λ_1 et λ_2 sont des fonctions deux fois dérivables sur I satisfaisant la condition
$$\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0.$$
(Cette condition simplifie les calculs et vient du fait qu'on fait varier deux constantes alors qu'une seule suffirait : on pourrait remplacer cette condition par la nullité d'une des deux fonctions λ_1 ou λ_2 comme on l'a déjà fait).

Exemple 1.4.12

1. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)\qquad y'' - 5y' + 6y = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$.
Comme on l'a vu dans un exemple précédent, les solutions de l'équation sans second membre
$$(E_0)\qquad z'' - 5z' + 6z = 0$$
sont les fonctions z de la forme :
$$z(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x}\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, on cherche une solution particulière de la forme $y_0(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^x$. On doit avoir :
$$\forall x \in \mathbb{R}\qquad y_0''(x) - 5y_0'(x) + 6y_0(x) = \big((ax+2a+b) - 5(ax+a+b) + 6(ax+b)\big)\,\mathrm{e}^x = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$$
donc $a = 1$ et $b = 2$ c'est à dire $y_0(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^x$ est solution particulière. Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme :
$$y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x} + (x+2)\,\mathrm{e}^x\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
2. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)\qquad y'' - 5y' + 6y = 3x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.
Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions z de la forme :
$$z(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x}\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Comme 2 est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, on cherche une solution particulière de la forme $y_0(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)\,\mathrm{e}^{2x}$. On a

$$y_0'(x) = \Big(2ax^3 + (3a+2b)x^2 + 2(b+c)x + c\Big)\,\mathrm{e}^{2x}$$

$$y_0''(x) = \Big(4ax^3 + 4(3a+b)x^2 + 2(3a+4b+2c)x + 2b + 4c\Big)\,\mathrm{e}^{2x}$$

$$\begin{aligned} y_0''(x) - 5y_0'(x) + 6y_0(x) = \Big[&\Big(4ax^3 + 4(3a+b)x^2 + 2(3a+4b+2c)x + 2b + 4c\Big) \\ &- 5\Big(2ax^3 + (3a+2b)x^2 + 2(b+c)x + c\Big) \\ &+ 6\Big(ax^3 + bx^2 + cx\Big)\Big]\,\mathrm{e}^{2x} \\ = \Big(&-3ax^2 + (6a-2b)x + (2b-c)\Big)\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

donc y_0 est solution de (E) si $a = -1$ et $b = -3$ et $c = -6$ c'est à dire

$$y_0(x) = -x(x^2 + 3x + 6)\,\mathrm{e}^{2x}$$

est solution particulière. Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$y(x) = \mu\,\mathrm{e}^{3x} - (x^3 + 3x^2 + 6x - \lambda)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) $\qquad y'' + 4y = \tan(x)$.
On cherche les solutions de l'équation sans second membre

$$(E_0) \qquad z'' + 4z = 0$$

sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$. Il vient

$$r^2 + 4 = (r - 2\mathrm{i})(r + 2\mathrm{i}) = 0$$

d'où les fonctions z solutions de (E_0) de la forme :

$$z(x) = \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche la solution générale de (E) par méthode de variation des constantes.
On pose $y(x) = \lambda(x)\cos(2x) + \mu(x)\sin(2x)$ avec la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda'(x)\cos(2x) + \mu'(x)\sin(2x) = 0. \qquad (*)$$

On a :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda'(x)\cos(2x) + \mu'(x)\sin(2x) - 2\lambda(x)\sin(2x) + 2\mu(x)\cos(2x) \\ &= -2\lambda(x)\sin(2x) + 2\mu(x)\cos(2x) \end{aligned}$$

et donc

$$y''(x) = -2\lambda'(x)\sin(2x) + 2\mu'(x)\cos(2x) - 4\lambda(x)\cos(2x) - 4\mu(x)\sin(2x)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \tan(x) = y'' - +4y = &-2\lambda'(x)\sin(2x) + 2\mu'(x)\cos(2x) - 4\lambda(x)\cos(2x) - 4\mu(x)\sin(2x) \\ &+ 4\Big(\lambda(x)\cos(2x) + \mu(x)\sin(2x)\Big) \\ = &-2\lambda'(x)\sin(2x) + 2\mu'(x)\cos(2x) \end{aligned}$$

Avec cette équation et $(*)$, on a alors un système d'équations

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda'(x)\cos(2x) + \quad \mu'(x)\sin(2x) = 0 \\ -2\lambda'(x)\sin(2x) + 2\mu'(x)\cos(2x) = \tan x \end{cases}$$

On obtient

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{2}\tan(x)\sin(2x) = -\tan(x)\sin(x)\cos(x) = -\sin^2(x) = \frac{\cos(2x)-1}{2}$$

et

$$\mu'(x) = \frac{1}{2}\tan(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\tan(x)\big(2\cos^2(x)-1\big) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Ces fonctions ont pour primitives :

$$\lambda(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + \lambda_0 \qquad \mu(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos(x)| + \mu_0$$

d'où les solutions de (E)

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4}\sin(2x)\cos(2x) - \frac{x}{2}\cos(2x) + \lambda_0\cos(2x) \\ &\qquad - \frac{1}{4}\cos(2x)\sin(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x)\ln|\cos(x)| + \mu_0\sin(2x) \\ &= \lambda_0\cos(2x) + \mu_0\sin(2x) - \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x)\ln|\cos(x)|. \end{aligned}$$

Fin du cours 6

Chapitre 2

Théorie des ensembles - Combinatoire

2.1 Un peu de théorie des ensembles

2.1.1 Notions de bases

On ne cherche pas ici à définir ce qu'est un ensemble, on se limite à une idée intuitive, basée sur la logique, les notions d'appartenance, d'inclusion et d'égalité. Généralement un ensemble E (ou un sous ensemble A de E) est décrit par une propriété de ses éléments :

$$E = \{x : \text{« propriété portant sur } x \text{ » }\} \quad \text{ou} \quad A = \{x \in E : \text{« propriété portant sur } x \text{ » }\}.$$

Par exemple $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 5\}$ est la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $2x + 3y = 5$, $\mathscr{P} = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\} : \ n \text{ premier } \} = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\} : \forall k \in \mathbb{N}^* \ (k \mid n) \Rightarrow (k = 1 \text{ ou } k = n)\}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Appartenance. Soit E un ensemble et x un élément de E. On note $x \in E$ (parfois $E \ni x$) la relation d'appartenance de x à E (x appartient à E).

Inclusion. Soit A un sous ensemble E. On note $A \subset E$ (parfois $E \supset A$) la relation entre A et E (A est inclus dans E). *Attention : ne pas confondre $A \subset E$ et $A \in E$.*

Voici le lien entre appartenance et inclusion : soient A et B deux sous-ensembles de E.

$$(A \subset B) \text{ si et seulement si } \Big(\forall x \in E \quad (x \in A) \implies (x \in B)\Big).$$

Attention : cette phrase ne signifie pas que $A \subset B$! Elle signifie seulement que pour que ce soit vrai, il est nécessaire et suffisant d'avoir l'implication : $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$.

En particulier :

$$(x \in A) \iff \big(\{x\} \subset A\big).$$

Égalité. Deux sous-ensembles A et B de E sont égaux si et seulement si on a la double implication

$$\Big(\forall x \quad (x \in A) \implies (x \in B)\Big) \quad \text{et} \quad (x \in B) \implies (x \in A)\Big)$$

c'est à dire l'équivalence : $\Big(\forall x \qquad (x \in A) \iff (x \in B)\Big)$

ou encore la double inclusion : $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarque : il est souvent judicieux de procéder par double implication ou double inclusion plutôt que d'essayer à tout pris de raisonner par équivalence.

L'ensemble des parties (ou des sous-ensembles, partie = sous-ensembles, les deux termes sont synonymes) d'un ensemble E est noté $\mathscr{P}(E)$. Son existence est un axiome. On a :

$$\Big(A \in \mathscr{P}(E)\Big) \iff \Big(A \subset E\Big).$$

Une partie d'un ensemble E n'ayant aucun élément est notée $\varnothing$ (par exemple $\varnothing = \{x \in E : x \neq x\}$). Il est à noter que cet ensemble ne dépend pas de E : il est universel. Pour deux ensembles quelconques E et F, c'est le même ensemble $\varnothing$ qui satisfait $\varnothing \subset E$ et $\varnothing \subset F$ par exemple

$$\varnothing = \{x \in E : x \neq x\} = \{x \in F : x \neq x\}.$$

Exemples 2.1.1

1. Soit $E_1 = \{0\}$. Alors $\mathscr{P}(E_1) = \Big\{\varnothing,\ \{0\}\Big\}$.
   1 partie à zéro élément ($\varnothing$) et **1** singleton (partie à un élément).
   Remarque : $1 + 1 = 4 = 2^1 = 2$
2. Soit $E_2 = \{0, 1\}$. Alors $\mathscr{P}(E_2) = \Big\{\varnothing,\ \{0\}, \{1\},\ \{0, 1\}\Big\}$.
   1 partie à zéro élément ($\varnothing$), **2** singletons (parties à un élément), **1** paire (partie à deux éléments).
   Remarque : $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.
3. Soit $E_3 = \{0, 1, 2\}$. Alors $\mathscr{P}(E_3) = \Big\{\varnothing,\ \{0\}, \{1\}, \{2\},\ \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\},\ \{0, 1, 2\}\Big\}$.
   1 partie à zéro élément, **3** singletons, **3** paires, **1** partie à trois éléments.
   Remarque : $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.
4. Soit $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, alors

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(E) = \Big\{&\varnothing,\ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\},\ \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},\\ &\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\},\ \{0, 1, 2, 3\}\Big\}.\end{aligned}$$

   1 partie à zéro élément, **4** singletons, **6** paires, **4** parties à trois éléments, **1** partie à quatre éléments.
   Remarque : $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

2.1.2 Opérations basiques

a) **Union.** Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'*union* de A et B est :

$$A \cup B = \{x \in E : (x \in A) \textbf{ ou } (x \in B)\} \quad \text{«}A \text{ union } B\text{»}$$

(on utilise parfois le symbole $\vee$ pour le **ou** ; ce **ou** n'est pas exclusif, les deux peuvent se réaliser en même temps). L'union est associative et commutative :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \qquad A \cup B = B \cup A.$$

Exemple

$[0; 2[\cup]1; 5] = [0; 5]$, $[0; 1]\cup]1; 2] = [0; 2] \neq [0; 1[\cup]1; 2]$.

b) **Intersection.** Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'*intersection* de A et B est :

$$A \cap B = \{x \in E : (x \in A) \textbf{ et } (x \in B)\} \quad \text{«}A \text{ inter } B\text{»}$$

(on utilise parfois le symbole $\wedge$ (prononcé "wedge") pour le **et**). L'intersection est associative et commutative :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \qquad A \cap B = B \cap A.$$

Exemple

Considérons $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ le sous ensemble de $\mathbb{Z}$ des multiples de 2 et $3\mathbb{Z} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ des multiples de 3. Alors

$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : (2 \mid n) \quad \text{et} \quad (3 \mid n)\} = \{n \in \mathbb{Z} : 6 \mid n\} = 6\mathbb{Z}.$$

De même

$$6\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : (6 \mid n) \quad \text{et} \quad (10 \mid n)\} = \{n \in \mathbb{Z} : (2 \mid n) \quad \text{et} \quad (3 \mid n) \quad \text{et} \quad (5 \mid n)\} = 30\mathbb{Z}.$$

c) **Différence et complémentaire.** Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La *différence* de A et B est définie par :

$$A \smallsetminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

(le « moins ensembliste » $\smallsetminus$ est penché dans le sens décroissant de la gauche vers la droite, à ne pas confondre avec le quotient / penché dans le sens croissant). Si $B \subset A$ la différence $A \smallsetminus B$ s'appelle le complémentaire de B dans A noté parfois $\complement_A B$. Selon le contexte, lorsqu'on travaille dans un ensemble E sous entendu sans avoir besoin de s'y référer en permanence, il peut être commode de remplacer $E \smallsetminus A = \complement_E A$ simplement par A^c. Ainsi :

$$A \smallsetminus B = A \cap B^c.$$

Exemple

$\mathbb{R} \smallsetminus [-1;1] = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$ et $[-1;1[\smallsetminus \mathbb{R}_-^* = [0;1[$.

Différence symétrique. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. La différence symétrique de A et B, souvent notée $A \triangle B$ est définie par

$$A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B).$$

Elle correspond au ou exclusif : $x \in A \triangle B$ si et seulement si $x \in A$ ou bien $x \in B$ mais pas les deux simultanément.

Exemple

$[0;3] \triangle]2;4] = [0;2] \cup]3;4]$.

d) **Produit cartésien de deux ensembles.** Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien* de E et F est l'ensemble des couples d'éléments (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \quad \text{et} \quad y \in F\}.$$

On note aussi $E \times E = E^2$ et on identifie $(E \times F) \times G$ avec $E \times (F \times G)$ et on note simplement $E \times F \times G$: on considère comme égaux les éléments $((x, y), z)$, $(x, (y, z))$ et (x, y, z).

e) **Fonction caractéristique (ou indicatrice).** Soit E un ensemble, $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties et $\mathscr{F}(E, \{0;1\})$ l'ensemble des fonctions de E dans $\{0;1\}$.
On définit une fonction $\chi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{F}(E, \{0;1\})$ de façon suivante : si $A \subset E$

$$\chi(A) = \mathbb{1}_A : E \to \{0;1\} \qquad \forall x \in E \quad (x \in A) \iff (\mathbb{1}_A(x) = 1).$$

Elle satisfait :

- $\forall x \in E \quad \mathbb{1}_E(x) = 1$ et $\mathbb{1}_\varnothing(x) = 0$.
  Pour $A, B \in \mathscr{P}(E)$:
- $\forall x \in E \quad \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x)$;
- $\forall x \in E \quad \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x)$;
- $\forall x \in E \quad \mathbb{1}_{A \smallsetminus B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\big(1 - 1_B(x)\big)$;
- $\forall x \in E \quad \mathbb{1}_{A \triangle B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - 2\mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = \big(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x)\big)^2 = |\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x)|$.
  Pour $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$:
- $\forall (x, y) \in E \times F \quad \mathbb{1}_{A \times B}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(y)$.

Exercice

Vérifier ces formules.

Remarques

(1) Si on remplace $\{0\,;1\}$ par $\mathbb{Z}/2Z$ (ensemble des entiers modulo 2 : $1 + 1 = 0 \mod 2$), on a une écriture plus sympathique de $\mathbb{1}_{A \triangle B}$:

$$\forall x \in E \quad \mathbb{1}_{A \triangle B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x).$$

(2) L'application $\chi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{F}(E; \{0\,;1\})$ est une bijection. On exhibe sa réciproque. Si $h : E \to \{0;1\}$ on pose $A = \{x \in E : h(x) = 1\}$. Alors $h = \mathbb{1}_A = \chi(A)$. En d'autres termes $\chi^{-1}(h) = A$. En effet, comme h et $\mathbb{1}_A$ ne prennent que les valeurs 0 et 1, il suffit juste de remarquer que : $(h(x) = 1) \iff (x \in A) \iff (\mathbb{1}_A(x) = 1)$.

f) **Quelques propriétés usuelles.**

— Double distributivité union intersection :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

— Formules de De Morgan :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{et} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c;$$

— Associativité de la différence symétrique :

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C);$$

— Distributivité de l'intersection par rapport à la différence symétrique :

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C);$$

— Intersection de produits :

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap C).$$

Exercice

Vérifier ces formules en utilisant la fonction caractéristique.

2.1.3 Généralisation des opérations sur les ensembles

a) **Union d'une famille.** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une famille de n sous-ensembles de E, on note

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Cette notation est justifiée par la relation de récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$: $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\Big) \cup A_n$.

On a l'équivalence suivante : $\displaystyle\Big(x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \iff \Big(\exists k \in \{1, \ldots, n\} \quad x \in A_k\Big)$.

Généralisons : si $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est une famille infinie de sous-ensembles de E indexée par $\mathbb{N}$, on note $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ leur union. On a : $\displaystyle\Big(x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \iff \Big(\exists k \in \mathbb{N} \quad x \in A_k\Big)$.

On peut encore généraliser au cas d'une famille indexée par un ensemble I (non vide) quelconque :

***Nota Bene* : union et quantificateur $\exists$**

Pour une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E indexée par un ensemble I, on désigne par $\bigcup_{i\in I} A_i$ l'ensemble satisfaisant :

$$\forall x \in E \qquad \Big(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\Big) \iff \Big(\exists i \in I \quad x \in A_i\Big).$$

* * * * * * * * * *

Si I est vide $\bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing$ (car $\varnothing$ est élément neutre pour l'intersection).

Exemples

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0;\frac{n-1}{n}\right]=[0;1[\quad \text{car} \quad (x\in[0;1[) \iff \left(\exists n\in\mathbb{N}^*\ 0\le x\le\frac{n-1}{n}\right).$$

$\mathbb{Z}=\bigcup_{p\in\mathscr{P}} p\mathbb{Z}$ où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

b) **Intersection d'une famille.** Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ est une famille de n sous-ensembles de E, on note

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Cette notation est justifiée par la relation de récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$: $\bigcap_{k=1}^{n} A_k=\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)\cup A_n$.

On a l'équivalence suivante : $\left(x\in\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \iff \left(\forall k\in\{1,\dots,n\} \quad x\in A_k\right)$.

Généralisons : si $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est une famille infinie de sous-ensembles de E indexée par $\mathbb{N}$, on note $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ leur intersection. On a : $\left(x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \iff \left(\forall k\in\mathbb{N} \quad x\in A_k\right)$.

On peut encore généraliser au cas d'une famille indexée par un ensemble I (non vide) quelconque :

Nota Bene **: intersection et quantificateur** $\forall$

Pour une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E indexée par un ensemble $I\neq\varnothing$, on désigne par $\bigcap_{i\in I} A_i$ l'ensemble satisfaisant :

$$\forall x\in E \quad \left(x\in\bigcap_{i\in I} A_i\right) \iff \left(\forall i\in I \quad x\in A_i\right).$$

****

Si I est vide on convient que $\bigcap_{i\in I} A_i=E$ (car E est élément neutre pour l'union).

Exemple

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0;\frac{n+1}{n}\right]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0;\frac{n+1}{n}\right[=[0;1] \quad \text{car} \quad (x\in[0;1]) \iff \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\ 0\le x<\frac{n+1}{n}\right).$$

c) **Partitions et recouvrement**

Sous-ensembles disjoints. Deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E sont disjoints si $A\cap B=\varnothing$. On note alors parfois† $A\sqcup B$ au lieu de $A\cup B$ leur union pour rappeler qu'ils sont disjoints. De même, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E deux à deux disjointes on note parfois† $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ au lieu de $\bigcup_{i\in I} A_i$ leur union.

Attention

i. On peut avoir par exemple $A\cap B\cap C=\varnothing$ sans pour autant que A, B, C soient deux à deux disjoints ;

ii. Ne pas confondre **disjoints** et **distincts**. Si A et B sont deux ensembles non vides disjoints, ils sont nécessairement distincts, mais ce n'est pas une condition suffisante.

Recouvrement d'un ensemble. Une famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ de E est un recouvrement de E si l'union de toutes ces parties est E : $E=\bigcup_{i\in I} A_i$.

†. Attention cependant à cette notation qui est trompeuse et peut désigner $(\{0\}\times A)\cup(\{1\}\times B)$, ce qui autorise $A\sqcup A=(\{0\}\times A)\cup(\{1\}\times A)$ même si A n'est pas vide.

Exemple

$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k-1;k+1[$ donc $\big(]k-1;k+1[\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$ par des intervalles ouverts.

Partition d'un ensemble. Une famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ de E est une partition de E si c'est un recouvrement de E par des parties non vide et deux à deux disjointes

$$\forall i \in I \quad A_i \neq \varnothing, \quad \forall (i,j) \in I \times I \quad (A_i \cap A_j \neq \varnothing) \implies (i = j) \qquad \text{et} \qquad E = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Remarque

Parfois, on s'autorise à répéter plusieurs fois la même partie : dans ce cas les parties sont deux à deux soit disjointes soit confondues :

$$\forall i \in I \quad A_i \neq \varnothing, \quad \forall (i,j) \in I \times I \quad (A_i \cap A_j \neq \varnothing) \implies (A_i = A_j) \qquad \text{et} \qquad E = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Exemple

(1) $\mathbb{R} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} [k;k+1[$ donc $([k;k+1[)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{R}$ par des intervalles semi-ouverts.

(2) Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, alors les classes d'équivalences forment une partition de E. En effet, si on note $[x] = \{y \in E : x \mathscr{R} y\}$ la classe de $x \in E$:
- pour $x \in E$, $x \in [x]$ par réflexivité donc $[x] \neq \varnothing$;
- le point précédent implique aussi que $E = \bigcup_{x\in E} [x]$;
- les classes sont deux à deux disjointes : pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}([x] \cap [y] \neq \varnothing) &\implies (\exists z \in E : z \in [x] \cap [y]) \implies (\exists z \in E : x \mathscr{R} z \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies (x \mathscr{R} y) \\ &\implies ([x] = [y]) \qquad \text{(on a utilisé la symétrie et transitivité).}\end{aligned}$$

Exercice

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble E.

(1) Construire à partir de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante pour l'inclusion et une suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante pour l'inclusion telles que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n.$$

(2) Construire à partir de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints telle que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

d) **Produit cartésien.** Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une famille de n ensembles, on note

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k.$$

Ses éléments sont les « n-uplets » $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avec $x_i \in A_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Remarque

Si tous les A_k sont égaux à un ensemble A, on note $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n} = \prod_{k=1}^{n} A$.
Par exemple, vous connaissez $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$...

Généralisons : si $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est une famille infinie de sous-ensembles de E indexée par $\mathbb{N}$, on note $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ leur produit. Les éléments sont les familles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in A_n$. Attention à ne pas confondre avec l'intersection : $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ signifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n$; le x ne dépend pas de n ici.

Remarque

Dans les cas particulier où tous les A_n sont égaux à un même ensemble A, on peut noter $A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n = \prod_{n\in\mathbb{N}} A$. On l'identifie avec l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{N}, A)$ des applications de $\mathbb{N}$ dans A, ou encore de **suites d'éléments de** A. En effet, ses éléments sont les familles (appelées **suites** dans ce cas) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et une telle suite peut être assimilée à la fonction

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{N} & \to & A \\ & n & \mapsto & x_n. \end{array}$$

Plus généralement encore on peut définir un produit d'une famille quelconque d'ensemble :

***Nota Bene* : Produit d'ensembles**

Pour une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles indexée par un ensemble I, on désigne par $\prod_{i\in I} A_i$ l'ensemble dont les éléments sont les familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que

$$\forall i \in I \quad x_i \in A_i.$$

L'application $p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$ est la *projection* sur le facteur j.

Remarque

Comme dans le cas où $I = \mathbb{N}$, si tous les A_i sont égaux à un même ensemble A, on peut noter A^I l'ensemble $\prod_{i\in I} A_i$, qu'on identifie avec l'ensemble $\mathscr{F}(I, A)$ des applications de I dans A. La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de A est assimilée à la fonction

$$\begin{array}{rccc} x: & I & \to & A \\ & i & \mapsto & x_i. \end{array}$$

e) **Quelques propriétés de l'union et de l'intersection.**

***Nota Bene* : négation et quantificateurs**

Le contraire (la négation) de la phrase « pour tout individu i, la propriété P_i est vraie » est la phrase « il existe un individu i pour lequel la propriété P_i est fausse. »

Remarque : attention aux erreurs de logique dues au langage courant.

Analysons la phrase suivante, trouvée dans le bulletin municipal de Messigny-Et-Vantoux, janvier 2018.

« La présence de panneaux radars a assurément permis de limiter les cas d'excès de vitesse [...] même si tout dépassement de la vitesse réglementaire n'est pas acceptable »

Il me semble que la fin de la phrase est à remplacer par

« ... même si ***aucun*** *dépassement de la vitesse réglementaire* ***n'****est acceptable »*

Dans la langue française, « **tout le monde ne satisfait pas un critère** » signifie « **il existe des individus qui ne satisfont pas ce critère** ».
Prenons la propriété P_i : *« il est acceptable que l'individu i dépasse la vitesse réglementaire ».*

La fin de la phrase écrite dans le bulletin signifie *grosso modo* *« il existe (au moins) un individu i tel que P_i est fausse »* c'est à dire

« il existe (au moins) un individu pour lequel il n'est pas acceptable qu'il dépasse la vitesse réglementaire ».

Je doute fort que c'est ce qui voulait être dit !

Propriété 1

Passage au complémentaire. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E.

$$E \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i) \quad \text{et} \quad E \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus A_i).$$

Propriété 2

Réindexation. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E et soit $\varphi : J \to I$ une bijection (ou plus généralement une surjection).

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_{\varphi(j)} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J} A_{\varphi(j)}.$$

Propriété 3

Associativité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose que I est la réunion d'une famille d'ensemble $(J_k)_{k\in K}$.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K}\Big(\bigcup_{i\in J_k} A_i\Big) \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in K}\Big(\bigcap_{i\in J_k} A_i\Big).$$

Propriété 4

Double distributivité. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E et B un sous ensemble de E.

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B).$$

Propriété 5

Comportement avec l'inclusion. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-ensembles d'un ensemble E indexée par un même ensemble I. Supposons que pour tout $i \in I$, $A_i \subset B_i$. Alors :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} B_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcap_{i\in I} B_i.$$

Voir les démonstrations (page 44)

2.2 Rappels sur les applications

2.2.1 Applications, injections, surjections, bijections

Soient E et F deux ensembles. On rappelle qu'**une application** $f : E \to F$ **(E espace de départ ou source, et F espace d'arrivée ou but) est définie par son graphe**, c'est à dire par un sous-ensemble Γ_f de $E \times F$ tel que

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \quad (x, y) \in \Gamma_f.$$

On note alors simplement $y = f(x)$, appelée image de x (par f) et on a

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F : x \in E\}.$$

Si $y = f(x)$ on dit que x est un **antécédent** de y.

Nota Bene

Tout élément de l'espace de départ a une et une seule image !
En revanche un élément de l'espace d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents, ou n'en avoir aucun.

Pour deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on définit la **composée**

$$g \circ f : E \to G \qquad \forall x \in E \quad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & y = f(x) & \longmapsto & g(y) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) \end{array}$$

On dit que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont **réciproques** l'une de l'autre si

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

$\mathrm{id}_E : E \to E$, $x \mapsto x$ étant **l'identité** de E, et $\mathrm{id}_F : F \to F$ **l'identité** de F.

Nota Bene

On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 2.2.1: Injectivité, surjectivité, bijectivité

Soit une application $f : E \to F$.

1. *f est **injective** si : $\forall x, x' \in E \ (f(x) = f(x')) \implies (x = x')$ (tout $y \in F$ a au plus un antécédent) ;*
2. *f est **surjective** si : $\forall y \in F \ \exists x \in E \ y = f(x)$ (tout $y \in F$ a au moins un antécédent) ;*
3. *f est **bijective** si elle est injective et surjective : $\forall y \in F \ \exists! x \in E \quad y = f(x)$ (tout $y \in F$ possède un antécédent et un seul).*

Remarques 2.2.2

1. Quand il y a surjectivité, on dit que $f : E \to F$ est une application de E **sur** F (au lieu d'une application de E **dans** F).
2. Si $f : E \to F$ admet une réciproque $g : F \to E$ alors f est bijective. En effet, pour tout $y \in F$ $g(y) \in E$ est l'unique antécédent de y :
   — c'est un antécédent car $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$;
   — il est unique car si x est un antécédent de y alors $y = f(x)$ donc $g(y) = g(f(x)) = x$.
   De plus la réciproque de f est unique : si $g' : F \to E$ est une autre réciproque alors pour tout $y \in F$, $g'(y) = g' \circ (f \circ g)(y) = (g' \circ f) \circ g(y) = g(y)$.
3. Si f est bijective, on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de $y \in F$. Alors $f^{-1} : F \to E$ est la réciproque de f : $\forall x \in E \quad f^{-1} \circ f(x) = x$ et $\forall y \in F \quad f \circ f^{-1}(y) = y$.

2.2.2 Applications ensemblistes

Définition 2.2.3: Applications ensemblistes associées à une application

Soit une application $f : E \to F$. On définit deux applications ***ensemblistes*** *(elles portent sur les* ***sous-ensembles*** *de E et F) :*

— *l'application ensembliste image directe induite par $f : E \to F$:*

$$f_* : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F) \qquad \forall X \subset E \quad f_*(X) = \{f(x) \in F : x \in X\} \subset F;$$

— *l'application ensembliste image réciproque induite par $f : E \to F$:*

$$f_*^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E) \qquad \forall Y \subset F \qquad f_*^{-1}(Y) = \{x \in E : f(x) \in Y\} \subset E.$$

Nota Bene **: Abus de notation.**

Attention !

1. Les applications ensemblistes

$$f_* : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F) \qquad \text{et} \qquad f_*^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$$

   ne sont en général pas des applications réciproques l'une de l'autre (cf. exercice 2.2.6) ;
2. **Si f n'est pas bijective**, l'application ensembliste $f_*^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$ n'est **jamais** la réciproque de l'application $f_* : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$;
3. En revanche, **si $f : E \to F$ est bijective**, l'application ensembliste $f_* : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ est aussi bijective de réciproque $f_*^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$. Plus précisément, si $g = f^{-1} : F \to E$ est la réciproque de f, alors $(f^{-1})_* = g_* = f_*^{-1}$, autrement dit :

$$\forall B \in F \qquad f_*^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} = \{f^{-1}(y) : y \in B\} = \{g(y) : y \in B\} = g_*(B)$$

   et en particulier, **si $f : E \to F$ est bijective :** $\forall y \in F \qquad f_*^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$.

* * * * * * * * * * *

Par la suite, comme c'est l'usage en mathématiques, on notera (abusivement) $f_* = f$ et $f_*^{-1} = f^{-1}$.

Proposition 2.2.4: Comportement avec les unions et intersections.

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles de F. On a :

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i);$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Soit une partie $B \subset F$ alors $\Big(f^{-1}(B)\Big)^c = f^{-1}(B^c)$.

Voir la démonstration (page 46)

Remarque 2.2.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$.
On a $f([0;2] \cap [-2;0]) = f(\{0\}) = \{0\}$ alors que $f([0;2]) \cap f([-2;-0]) = [0;4]$ c'est à dire

$$f([0;2] \cap [-2;0]) = f(\{0\}) = \{0\} \subsetneq f([0;2]) \cap f([-2;-0]) = [0;4].$$

Exercice 2.2.6

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que $\forall A \subset E \quad A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$. Montrer que si f est injective, il y a égalité. Trouver un contre exemple à l'égalité si f n'est pas injective.
2. Montrer que $\forall B \subset F \quad f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$. Montrer que si f est surjective, il y a égalité. Trouver un contre exemple à l'égalité si f n'est pas surjective.
3. Montrer que si f est injective, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$. de sous-ensembles de E, on a l'égalité : $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Nota Bene

Les opérations ensemblistes ($\cap$, $\cup$ et $\setminus$) se comportent bien par image réciproque ;
les opérations ensemblistes se comportent mal par image directe.

Proposition 2.2.7: Partition et surjection.

Soit $f : E \to F$ une application surjective. Si $(B_k)_{k\in K}$ est une partition de F alors $\big(f^{-1}(B_k)\big)_{k\in K}$ est une partition de E. En particulier, $\big(f^{-1}(\{y\})\big)_{y\in F}$ est une partition de E.

Voir la démonstration (page 48)

Remarque 2.2.8

Si on supprime l'hypothèse de surjectivité, certtaines parties peuvent être vides. Dans ce cas : $\big(f^{-1}(\{y\})\big)_{y\in F}$ est un recouvrement de E en parties deux à deux disjointes et, plus généralement, $\big(f^{-1}(B_k)\big)_{k\in K}$ est un recouvrement de E en parties deux à deux disjointes (ou confondues, si la définition de partition autorise l'égalité des parties $(B_k \cap B_\ell \neq \varnothing) \implies (B_k = B_\ell)$ voir la remarque sur la définition de partition).

2.3 Cardinaux et ensembles finis

2.3.1 Equipotence, ensemble des entiers naturels et cardinal d'un ensemble

Définition 2.3.1: Equipotence

*Deux ensembles sont dits **équipotents** s'ils sont en bijection.*

Remarque 2.3.2

La relation d'équipotence est
- réflexive : l'application identité d'un ensemble X $\mathrm{id}_X : X \to X \; x \mapsto x$ est une bijection ;
- symétrique : si $f : X \to Y$ est une bijection, alors $f^{-1} : Y \to X$ aussi ;
- transitive : si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des bijections, alors $g \circ f : X \to Z$ est une bijection.

Appliquée aux sous-ensembles d'un ensemble donné E, c'est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.

Cette remarque nous permet d'étendre l'équipotence à des constructions d'ensembles :

Proposition 2.3.3: L'équipotence est conservée lors des constructions d'ensembles

1. *Si A_1 et A_2 sont respectivement équipotents à B_1 et B_2 alors*
   (a) *$A_1 \times A_2$ est équipotent à $B_1 \times B_2$;*
   (b) *$\mathscr{F}(A_1, A_2)$ est équipotent à $\mathscr{F}(B_1, B_2)$ (autrement dit $A_2^{A_1} = B_2^{B_1}$).*
2. *Si A est équipotent à B alors $\mathscr{P}(A)$ est équipotent à $\mathscr{P}(B)$.*

Démonstration.

1. *Soient $f_1 : A_1 \to B_1$ et $f_2 : A_2 \to B_2$ des bijections. Alors*
   (a) *$F : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ définie par $F(a_1; a_2) = (f_1(a_1); f_2(a_2))$ est une bijection de réciproque définie par $F^{-1}(b_1, b_2) = (f_1^{-1}(b_1); f_2^{-1}(b_2))$;*
   (b) *$\Phi : \mathscr{F}(A_1, A_2) \to \mathscr{F}(B_1, B_2)$ définie par $\Phi(g) = f_2 \circ g \circ f_1^{-1}$ est une bijection de réciproque définie par $\Phi^{-1}(h) = f_1 \circ h \circ f_2^{-1}$*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "g"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_1 \arrow[u, "f_1^{-1}"] \arrow[r, "\Phi(g)"] & B_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \in \mathscr{F}(A_1, A_2) \arrow[d, mapsto] \arrow[d, mapsto, shift left=6, "\Phi"] \\ \Phi(g) \in \mathscr{F}(B_1, B_2) \end{tikzcd}$$

2. *On a vu que pour tout ensemble E, $\mathscr{P}(E)$ est en bijection avec $\mathscr{F}(E; \{0; 1\})$ (voir la fonction caractéristique). Donc il suffit d'appliquer le cas précédent.*

□

Remarque 2.3.4

On peut généraliser 1.(a) aux cas de familles d'ensembles : si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ sont des familles d'ensembles tels que pour chaque $i \in I$ A_i et équipotent à B_i, alors les produits $\prod_{i\in I} A_i$ et $\prod_{i\in I} B_i$ sont équipotents.

Définition 2.3.5: Ensemble fini ou infini

1. *Un ensemble (non vide) est **infini** s'il est équipotent à lui-même privé d'un de ses points. Évidemment, un ensemble qui n'est pas **infini** est dit **fini**.*
2. *L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble **infini**, **ordonné**, et satisfait*
   — *Toute partie non vide admet un plus petit élément ;*
   — *Toute partie non vide majorée admet un plus grand élément.*

Remarque 2.3.6

1. L'existence de $\mathbb{N}$ est un axiome. Il est totalement ordonné : une partie formée de deux élément admet une plus grand et un plus petit élément, donc ces éléments sont comparables.
2. 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$. Tout élément n a un **successeur** $n + 1$, et tout élément $n \neq 0$ a un **prédécesseur** $n - 1$ ce qui permet de définir l'addition dans $\mathbb{N}$ et d'avoir le raisonnement par récurrence.
3. L'application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ $n \mapsto n + 1$ est une bijection.
   (De même, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ $x \mapsto x+1$ si $x \in \mathbb{N}$ et $x \mapsto x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est une bijection).
4. Une partie non vide de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.
5. Tout ensemble satisfaisant les axiomes de $\mathbb{N}$ est en bijection croissante avec $\mathbb{N}$.

Définition 2.3.7

Un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit dénombrable. *Un ensemble en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ est dit* au plus dénombrable *(c'est à dire fini ou dénombrable).*

Exemples 2.3.8

(Vus en Math 2A, revus en cours de math 2C).

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable : l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $2k \mapsto -k$ et $2k + 1 \mapsto k + 1$ est une bijection.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable : on numérote en spirale en partant de $(0, 0)$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable : on numérote en rectangles emboités en partant de $(0, 0)$.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable : il y a une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ et une surjection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$

donc une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : méthode de la diagonale de Cantor.

2.3.2 Ensembles finis et cardinaux

On peut montrer que tout ensemble satisfaisant la définition de $\mathbb{N}$ ci-dessus est en bijection avec $\mathbb{N}$. On peut aussi montrer que

1. un ensemble est infini si et seulement s'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble ;
2. un ensemble non vide X est fini si et seulement s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que X est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$. L'entier n s'appelle le **cardinal** de X noté $\operatorname{card} X$. On pose $\operatorname{card} \varnothing = 0$. Deux ensembles finis équipotents ont même cardinal (l'équipotence étant symétrique et transitive).

Les opération $+$ et $\times$ sur les entiers s'interprètent en termes de cardinaux d'ensembles finis : si A et B sont des ensembles finis de cardinaux respectifs a et b alors
- si $A \cap B = \varnothing$, $\operatorname{card}(A \sqcup B) = a + b = \operatorname{card}(B \sqcup A) = b + a$;
- $\operatorname{card}(A \times B) = ab = \underbrace{b + \cdots + b}_{a \text{ fois}} = \underbrace{a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$.

En effet, les trois ensembles suivants sont égaux : $A \times B = \bigsqcup_{b \in B} A \times \{b\} = \bigsqcup_{a \in A} \{a\} \times B$ et pour tout $b \in B$, $A \times \{b\}$ est équipotent à A de même que pour tout $a \in A$, $\{a\} \times B$ est équipotent à B (pensez à une tablette de chocolat ! $A \times \{b\}$ = la ligne b, $\{a\} \times B$ = la colonne a). Voir aussi la proposition 2.3.13 plus loin.

Exercice 2.3.9

Vérifier avec l'équipotence d'ensembles finis les propriétés de commutativité de la multiplication et de distributivité de l'addition par rapport à la multiplication : $ab = ba$ et $a(b + c) = ab + ac$.

Comme conséquence de la proposition 2.3.3 et des propriétés de $\mathbb{N}$, on a les résultats suivants :

Proposition 2.3.10: Propriété des ensembles finis

1. *Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} E$;*
2. *Soit $f : E \to F$ une application. Si E un ensemble fini alors $f(E)$ aussi et*
$$\operatorname{card} f(E) \leq \operatorname{card} E$$
(avec égalité si et seulement si f est injective) ;
3. *Soit E un ensemble fini et $f : E \to F$ une **surjection**. Alors F est fini et*
$$\operatorname{card} E \geq \operatorname{card} F$$
(avec égalité si et seulement si f est bijective) ;
4. *Soit $f : E \to F$ une **injection**.*
   — *Si $f(E)$ est fini alors E aussi et :* $\operatorname{card} E = \operatorname{card} f(E)$;
   — *Si F est fini, alors $f(E)$ et E aussi et :* $\operatorname{card} E = \operatorname{card} f(E) \leq \operatorname{card} F$
   (avec égalité si et seulement si f est bijective).
5. *Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal. Alors on a équivalence entre*
(a) f injective (b) f surjective (c) f bijective.

Remarques 2.3.11

1. En d'autres termes
l'espace d'arrivée d'une injection est plus gros que l'espace de départ
l'espace d'arrivée d'une surjection est plus petit que l'espace de départ.
2. La contraposée de (4) s'appelle le **principe des tiroirs** : si on veut ranger n objets dans p tiroirs et si $n > p$, alors un tiroir contiendra au moins deux objets. En effet, si E est

l'ensemble des objets, F l'ensemble des tiroirs et $f : E \to F$ est l'application qui à chaque objet associe le tiroir dans lequel il est rangé, alors f ne peut être injective si $\operatorname{card} E > \operatorname{card} F$.

Exercice 2.3.12

Voici une jolie application non évidente du principe des tiroirs (un théorème de Dirichlet) : soit $x \in \mathbb{R}$, et $N \geq 2$ un entier. Il existe alors deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq N$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}.$$

Démontrer ce résultat en prenant pour N tiroirs les intervalles $\left[\frac{i-1}{N}; \frac{i}{N}\right[$ avec $1 \leq i \leq N$, et pour objets les $N+1$ parties fractionnaires $jx - \lfloor jx \rfloor \in [0;1[$ où $\lfloor jx \rfloor$ désigne la partie entière de jx, avec $1 \leq j \leq N+1$.

2.3.3 Analyse combinatoire

L'utilisation des applications (et pas seulement des bijections !) est très utile pour calculer des cardinaux. Voici quelques propriétés essentielles pour faire du dénombrement.

Proposition 2.3.13: Cardinal d'une union

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie (I est fini) d'ensembles finis (chaque A_i est fini) deux à deux disjoints alors

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \operatorname{card}(A_i).$$

En particulier, si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de A,

$$\operatorname{card} A = \sum_{i \in I} \operatorname{card}(A_i).$$

Voir la démonstration (page 49)

Corollaire 2.3.14: lemme des bergers

1. *Si $f : A \to B$ est une application entre deux ensembles finis, alors*

$$\operatorname{card} A = \sum_{y \in B} \operatorname{card} f^{-1}(\{y\})$$

2. *Si de plus $f : A \to B$ est une* ***fibration*** *c'est à dire :*

   f est une surjection

   tous les $f^{-1}(\{y\})$ (fibre au-dessus de y) pour $y \in B$ ont même cardinal p

   alors

$$\operatorname{card} A = p \times \operatorname{card} B.$$

Démonstration. *On applique simplement la proposition 2.2.7 et proposition 2.3.13.* □

Proposition 2.3.15: Cardinal d'un produit

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie (I est fini) d'ensembles finis

$$\operatorname{card}\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \operatorname{card}(A_i);$$

Démonstration. *On fait une récurrence exactement comme pour la proposition 2.3.13.* □

Corollaire 2.3.16: Cardinal d'un espace de fonctions

1. *si A et B sont deux ensembles finis*
$$\operatorname{card} \mathscr{F}(A,B) = \operatorname{card} B^A = \operatorname{card} B^{\operatorname{card} A};$$
2. *Si A est un ensemble fini*
$$\operatorname{card} \mathscr{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A}.$$

Démonstration.

1. *On rappelle que si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, se donner une fonction $f : A \to B$ équivaut à se donner un p-uplet $\big(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p)\big)$ de B donc un élément de $B^A = \underbrace{B \times \cdots \times B}_{p}$. On peut donc appliquer la proposition 2.3.15.*
2. *On rappelle également que la fonction caractéristique (cf. paragraphe 2.1.2) $A \mapsto \mathbb{1}_A$ réalise une bijection entre $\mathscr{P}(A)$ et $\mathscr{F}(A, \{0;1\})$ donc on peut appliquer le résultat précédent.*

□

Exemples 2.3.17

On considère un ensemble E infini en bijection avec $\mathbb{N}$ et on numérote ses éléments au moyen d'une bijection $\mathbb{N}^* \to E$, $k \mapsto e_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ ($E_0 = \varnothing$).

1. **Les arrangements**.
Pour $p \leq n$, on note $\operatorname{Inj}\big(\{1, \dots, p\}, E_n\big)$ l'ensemble des injections de $\{1, \dots, p\}$ dans E_n. Son cardinal est noté
$$\boxed{\operatorname{card}\Big(\operatorname{Inj}\big(\{1, \dots, p\}, E_n\big)\Big) = A_n^p}$$
Pour simplifier, on note $\mathcal{I}_p(E_n) = \operatorname{Inj}\big(\{1, \dots, p\}, E_n\big)$. Considérons l'application surjective
$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathcal{I}_p(E_n) & \to & E_n \\ & f & \mapsto & f(p) \end{array}$$
Pour tout $k \in E_n$, $\theta^{-1}(\{e_k\}) = \{f \in \mathcal{I}_p(E_n) : f(p) = e_k\}$ est en bijection avec $\mathcal{I}_{p-1}(E_n \smallsetminus \{e_k\})$ qui est de cardinal A_{n-1}^{p-1}. Ainsi θ est une fibration et d'après le lemme des bergers,
$$\boxed{A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}}$$
Comme $A_k^1 = \operatorname{card} \mathcal{I}_1(E_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient la formule suivante par récurrence
$$\boxed{A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{où } k! = k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1}$$
Remarquons en passant que pour $n = p$, $\operatorname{card}\big(\operatorname{Bij}(\{1, \dots, n\}, E_n)\big) = A_n^n = n!$ est le cardinal de l'ensemble des bijections entre deux ensembles de même cardinal n ; évidemment, si $p > n$ alors $A_n^p = 0$. On convient aussi que $A_n^0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en particulier $0! = 1$.
2. **Les combinaisons**. La formule $\boxed{2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$
Soit l'application
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathscr{P}(E_n) & \to & \{0, 1, \dots, n\} \\ & X & \mapsto & \operatorname{card} X \end{array}$$
Cette application est surjective ; $\mathscr{P}_k(E_n) = \Phi^{-1}(\{k\})$ est l'ensemble des parties à k éléments de E_n. Son cardinal (appelé nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n

éléments, dit aussi coefficient binomial) est noté

$$\boxed{\binom{n}{k} = \operatorname{card} \mathscr{P}_k(E_n)}$$

Les ensembles $\mathscr{P}_k(E_n)$ forment donc une partition de $\mathscr{P}(E_n)$ par conséquent on a la formule

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

3. **Le triangle de Pascal :** $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

On suppose $n \geq 1$. On considère l'application « suppression de l'élément e_n »

$$\Psi : \mathscr{P}_k(E_n) \to \mathscr{P}_{k-1}(E_{n-1}) \sqcup \mathscr{P}_k(E_{n-1}) \qquad X \mapsto \Psi(X) = X \smallsetminus \{e_n\}.$$

— Si $e_n \in X$, alors $\Psi(X) = X \smallsetminus \{e_n\} \in \mathscr{P}_{k-1}(E_{n-1})$
— Si $e_n \notin X$, $\Psi(X) = X \smallsetminus \{e_n\} = X \in \mathscr{P}_k(E_{n-1})$.
C'est une bijection de réciproque l'application « ajout de l'élément e_n » donnée par

$$\Psi^{-1}(Y) = Y \cup \{e_n\} \ \text{ si } Y \in \mathscr{P}_{k-1}(E_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad \Psi^{-1}(Y) = Y \ \text{ si } Y \in \mathscr{P}_k(E_{n-1}).$$

On en déduit la relation du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

En outre, l'application « passage au complémentaire » $\sigma : \mathscr{P}(E_n) \to \mathscr{P}(E_n)$, $X \mapsto X^c$ est une bijection (c'est une *involution*, c'est à dire sa propre inverse), qui échange $\mathscr{P}_k(E_n)$ et $\mathscr{P}_{n-k}(E_n)$ d'où la seconde relation du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Partant de $\mathscr{P}_0(E_n) = \{\varnothing\}$ de cardinal $\operatorname{card} \mathscr{P}_0(E_n) = 1 = \binom{n}{0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut calculer tous les $\binom{n}{k}$ par double récurrence sur n et k : on obtient le triangle de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Évidemment, si $k > n \geq 0$ alors $\mathscr{P}_k(E_n) = \varnothing$ donc $\binom{n}{k} = 0$.

4. **Lien entre combinaisons et arrangements :** $\boxed{A_n^p = p!\binom{n}{p}}$

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & \mathcal{I}_p(E_n) & \to & \mathscr{P}_p(E_n) \\ & f & \mapsto & f(\{1, \ldots, p\}) \end{array}$$

C'est une fibration : tout $X \in \mathscr{P}_p(E_n)$ a pour cardinal p et $\lambda^{-1}(X) = \mathrm{Bij}(\{1,\dots,p\}, X)$ a donc pour cardinal $A_p^p = p!$. Du lemme des bergers, on déduit la relation

$$\boxed{A_n^p = p!\binom{n}{p} \qquad \text{i.e.} \qquad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Pour aller plus loin, voici quelques exemples plus compliqués, mais utilisant des arguments semblables.

1. **Les répartitions**
   On cherche à dénombrer le nombre de façons de répartir n objets indiscernables dans p tiroirs. Cela revient à dénombrer

$$\mathcal{R}_{n,p} = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p : n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n\}$$

   On peut modéliser la situation en prenant une ligne formée de $n+p-1$ cases et on choisit $p-1$ cases dans lesquelles on met une croix, qui servent de séparations.

			+			+					+	+						+	

   On a alors n_1 cases avant la première croix, n_2 entre la première et la deuxième etc. jusqu'à n_p au delà de la p-ème croix (ici, $p = 6$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = 0$, $n_5 = 5$, $n_6 = 1$). Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{card}\left(\mathcal{R}_{n,p}\right) = \binom{n+p-1}{p-1}}$$

   Remarquons que $p-1$ est le nombre de signes $+$ dans la formule $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$: ces signes $+$ jouent le rôle de séparations.

   Généralisons la formule $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Soit E_n un ensemble de cardinal n. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} \Lambda : & \mathscr{F}(E_n, \{1,\dots,p\}) & \to & \mathcal{R}_{n,p} \\ & f & \mapsto & (n_1, n_2, \dots, n_p) \end{array} \qquad \text{où} \quad n_i = \mathrm{card}\left(f^{-1}\big(\{i\}\big)\right) \quad 1 \le i \le p.$$

   C'est une surjection donc les images réciproques des éléments de $\mathcal{R}_{n,p}$ forment une partition de $\mathscr{F}(E_n, \{1,\dots,p\})$ et on a alors

$$\mathrm{card}\Big(\mathscr{F}(E_n, \{1,\dots,p\})\Big) = p^n = \sum_{(n_1,n_2,\dots,n_p)\in\mathcal{R}_{n,p}} \mathrm{card}\Big(\Lambda^{-1}\big(\{(n_1,\dots,n_p)\}\big)\Big).$$

   De plus $\Lambda^{-1}\Big(\big\{(n_1,\dots,n_p)\big\}\Big)$ est en bijection avec

$$\Big\{(A_1, \cdots, A_p) \in \mathscr{P}_{n_1}(E_n) \times \cdots \times \mathscr{P}_{n_p}(E_n) : E_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\Big\}$$

   par le biais de l'application $(A_1, \cdots, A_p) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k\mathbb{1}_{A_k}$. son cardinal est

$$\mathrm{card}\Big(\Lambda^{-1}\big(\{(n_1,\dots,n_p)\}\big)\Big) = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_p}{n_p} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_p!}.$$

   d'où la formule suivante

$$\boxed{p^n = \sum_{(n_1,n_2,\dots,n_p)\in\mathcal{R}_{n,p}} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_p!}.}$$

2. Soient A et B deux ensembles finis disjoints de cardinaux a et b respectivement, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \le a + b$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} \pi_A : & \mathscr{P}_n(A \sqcup B) & \to & \{0,\dots,k\} \\ & X & \mapsto & \mathrm{card}(A \cap X) \end{array}$$

Pour $0 \leq k \leq n$, l'ensemble $\pi_A^{-1}(\{k\})$ est en bijection avec $\mathscr{P}_k(A) \times \mathscr{P}_{n-k}(A)$ via l'application $X \mapsto (A \cap X, B \cap X)$. On a alors

$$\mathscr{P}_n(A \sqcup B) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \pi_A^{-1}(\{k\}) \quad \text{et donc} \quad \boxed{\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \sum_{k+\ell=n} \binom{a}{k}\binom{b}{\ell}}$$

Remarquons que certains termes peuvent être nuls : si $k > a$, $\binom{a}{k} = 0$ et si $\ell > b$, $\binom{b}{\ell} = 0$. Application : une urne opacifiée contient a boules noires numérotées de 1 à a et b boules blanches numérotées de 1 à b indiscernables au toucher. On en prélève n simultanément : on observe $\binom{a+b}{n}$ possibilités, le nombre de situations donnant k boules noires et $\ell = n - k$ blanches étant égal à $\binom{a}{k}\binom{b}{\ell}$.

3. La formule $\boxed{n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}}$

Soit E_n un ensemble de cardinal n et soit $G_n = \{(x, X) : x \in X \subset E_n\}$. On calcule le cardinal de G_n de deux façons. Pour cela, on considère les trois applications

$$\begin{tikzcd} G_n \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathscr{P}(E_n) \smallsetminus \{\varnothing\} \arrow[d, "\Phi"] \\ E_n & \{1, \ldots, n\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x, X) \arrow[r, mapsto, "\pi_2"] \arrow[d, mapsto, "\pi_1"] & X \arrow[d, mapsto, "\Phi"] \\ x & \operatorname{card} X \end{tikzcd}$$

Ces applications sont surjectives.

(a) Utilisation de π_1.
Pour $x_0 \in E_n$ l'ensemble $\pi_1^{-1}(\{x_0\})$ est en bijection avec $\mathscr{P}(E_n \smallsetminus \{x_0\})$ et donc de cardinal $2^{n-1} = \operatorname{card} \mathscr{P}(E_{n-1})$; la bijection est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(\{x\}) & \to & \mathscr{P}(E_n \smallsetminus \{x\}) \\ (x, X) & \mapsto & X \smallsetminus \{x\} \end{array} \quad \text{de réciproque} \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E_n \smallsetminus \{x\}) & \to & \pi_1^{-1}(\{x\}) \\ Y & \mapsto & (x, Y \sqcup \{x\}) \end{array}$$

Ainsi, π_1 est une fibration et d'après le lemme des bergers on trouve le premier membre :

$$\operatorname{card} G_n = n2^{n-1}.$$

(b) Utilisation de $\Phi \circ \pi_2$.
On remarque tout d'abord que pour $1 \leq k \leq n$, $\Phi^{-1}(\{k\}) = \mathscr{P}_k(E_n)$. Alors

$$G_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} \big(\Phi \circ \pi_2\big)^{-1}(\{k\}) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \pi_2^{-1}\big(\Phi^{-1}(\{k\})\big) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \pi_2^{-1}\big(\mathscr{P}_k(E_n)\big)$$

Notons $G_{n,k} = \{(x, X) \in G : \operatorname{card} X = k\} = \pi_2^{-1}\big(\mathscr{P}_k(E_n)\big)$. On a donc

$$\pi_2 : \begin{array}{ccc} G_{n,k} & \to & \mathscr{P}_k(E_n) \\ (x, X) & \mapsto & X \end{array}$$

est une surjection et pour $X_0 \in \mathscr{P}_k(E_n)$, $\pi_2^{-1}(\{X_0\})$ est en bijection avec X_0 de cardinal k. D'après le lemme des bergers,

$$\operatorname{card} G_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card} G_{n,k} \quad \text{et} \quad \operatorname{card} G_{n,k} = k \operatorname{card} \mathscr{P}_k(E_n) = k\binom{n}{k}.$$

Ainsi on a le second membre

$$\operatorname{card} G_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

En réunissant (a) et (b), il vient

$$n2^{n-1} = \operatorname{card} G_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

4. **Nombre de surjections**
Pour $p \leq q$, on note $\mathrm{Surj}(E_p, F_q)$ l'ensemble des surjections de E_p sur F_q de cardinaux respectifs p et q. Son cardinal est noté

$$\boxed{\mathrm{card}\Big(\mathrm{Surj}\big(E_p, F_q\big)\Big) = S_q^p}$$

Soit $p \leq q$. Considérons les applications surjectives

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{F}(E_p, F_q) & \xrightarrow{\sigma} & \mathscr{P}(F_q) \smallsetminus \{\varnothing\} & \xrightarrow{\Phi} & \{1, \ldots, p\} \\ f & \longmapsto & f(E_p) & \longmapsto & \mathrm{card}\, f(E_p) \end{array}$$

Pour tout $X \in \mathscr{P}(F_q) \smallsetminus \{\varnothing\}$, $\sigma^{-1}(X) = \mathrm{Surj}(E_p, X)$.
Pour $k \in \{1, \ldots, p\}$, $\Phi^{-1}(\{k\}) = \mathscr{P}_k(F_q)$ et

$$\mathscr{F}(E_p, F_q) = \bigsqcup_{k=1}^{p} (\Phi \circ \sigma)^{-1}(\{k\}) = \bigsqcup_{k=1}^{p} \sigma^{-1}\big(\mathscr{P}_k(F_q)\big).$$

Or pour tous les $X \in \mathscr{P}_k(F_q)$ les ensembles $\sigma^{-1}(X) = \mathrm{Surj}(E_p, X)$ ont même cardinal S_p^k. En vertu du lemme des bergers,

$$\mathrm{card}\Big(\sigma^{-1}\big(\mathscr{P}_k(F_q)\big)\Big) = S_p^k\, \mathrm{card}\,\big(\mathscr{P}_k(F_q)\big)$$

et donc

$$\mathrm{card}\,\mathscr{F}(E_p, F_q) = q^p = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{card}\,\sigma^{-1}\big(\mathscr{P}_k(F_q)\big) = \sum_{k=1}^{p} \binom{q}{k} S_p^k$$

Les démonstrations du chapitre 2

Propriété 1

Passage au complémentaire. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E.

$$E \smallsetminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I}(E \smallsetminus A_i) \quad \text{et} \quad E \smallsetminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(E \smallsetminus A_i).$$

Propriété 2

Réindexation. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E et soit $\varphi : J \to I$ une bijection.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_{\varphi(j)} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J} A_{\varphi(j)}.$$

Propriété 3

Associativité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E. On suppose que I est la réunion d'une famille d'ensemble $(J_k)_{k\in K}$.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K}\Big(\bigcup_{i\in J_k} A_i\Big) \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{k\in K}\Big(\bigcap_{i\in J_k} A_i\Big).$$

Propriété 4

Double distributivité. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E et B un sous ensemble de E.

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B).$$

Propriété 5

Comportement avec l'inclusion. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-ensembles d'un ensemble E indexée par un même ensemble I. Supposons que pour tout $i \in I$, $A_i \subset B_i$. Alors :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} B_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcap_{i\in I} B_i.$$

<u>Démonstration.</u>

Prop. 1 *Pour l'égalité de gauche :*

$$\begin{aligned}\Big(x \in E \smallsetminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\Big) &\iff \Big(x \notin \bigcup_{i\in I} A_i\Big)\\ &\iff (\forall i \in I \quad x \notin A_i)\\ &\iff \Big(x \in \bigcap_{i\in I}(E \smallsetminus A_i)\Big).\end{aligned}$$

Pour passer de la première ligne à la deuxième, on a simplement traduit le fait que

la négation de $(\exists i \in I \quad x \in A_i)$ *est* $(\forall i \in I \quad x \notin A_i)$.

Pour la seconde égalité, écrivons la première en remplaçant chaque A_i *par* A_i^c *:*

$$E \smallsetminus \Big(\bigcup_{i\in I} A_i^c\Big) = \bigcap_{i\in I}(E \smallsetminus A_i^c)$$

ce qui équivaut en passant au complémentaire à :

$$\bigcup_{i\in I}(E \smallsetminus A_i) = E \smallsetminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big).$$

Prop. 2 *Supposons que* $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. *Alors il existe un* $i_0 \in I$ *tel que* $x \in A_{i_0}$. *Comme* φ *est surjective, il existe un* $j_0 \in J$ *(on n'a pas besoin de l'unicité) tel que* $i_0 = \varphi(j_0)$ *auquel cas* $x \in A_{\varphi(j_0)}$. *Donc* $x \in \bigcup_{j\in J} A_{\varphi(j)}$. *Ce qui prouve l'inclusion* $\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{j\in J} A_{\varphi(j)}$.
Réciproquement supposons $x \in \bigcup_{j\in J} A_{\varphi(j)}$. *Il existe un* $j_0 \in J$ *tel que* $x \in A_{\varphi(j_0)}$. *Or* $\varphi(j_0) \in I$ *donc il existe bien un* $i \in I$ *tel que* $x \in A_i$, *donc* $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. *Ce qui prouve l'inclusion réciproque* $\bigcup_{i\in I} A_i \supset \bigcup_{j\in J} A_{\varphi(j)}$ *et donc l'égalité*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_{\varphi(j)}.$$

L'autre égalité s'obtient en passant au complémentaire et en utilisant la propriété 1.

Prop. 3 *Encore une fois, il suffit de montrer l'égalité de gauche, celle de droite s'obtient en passant au complémentaire et en utilisant la propriété 1.*
Pour tout $k \in K$, *on a l'inclusion évidente :* $\bigcup_{i\in J_k} A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. *On en déduit immédiatement*

$$\bigcup_{k\in K}\Big(\bigcup_{i\in J_k} A_i\Big) \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Voyons la réciproque.

Supposons $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. *Alors il existe* $i_0 \in I$ *tel que* $x \in A_{i_0}$. *Comme* $J = \bigcup_{k\in K} J_k$ *il existe un* $k \in K$ *tel que* $i_0 \in J_k$. *Mais alors* $x \in A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in J_k} A_i \subset \bigcup_{k\in K}\Big(\bigcup_{i\in J_k} A_i\Big)$.

Les propriétés 4 et 5 sont laissées en exercice.

Retour page 30 □

Proposition : Comportement avec les unions et intersections.

Soit $f : E \to F$ une application. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles de F. On a :

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i);$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Soit une partie $B \subset F$ alors

$$\Big(f^{-1}(B)\Big)^c = f^{-1}(B^c).$$

Retour page 32

<u>*Démonstration.*</u>

1. *Pour les images directes.*
   Montrons que $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned}
\Big(y \in f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\Big) &\iff \Big(\exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad f(x) = y\Big) \\
&\iff (\exists x \in E\ \exists i \in I\ x \in A_i \quad \text{et} \quad f(x) = y) \\
&\iff (\exists i \in I\ \exists x \in A_i \quad f(x) = y) \\
&\iff (\exists i \in I\ y \in f(A_i)) \\
&\iff \Big(y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)\Big).
\end{aligned}$$

   Ce qui prouve l'égalité.
   Montrons que $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ (attention : il n'y a pas égalité en général). Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned}
\Big(y \in f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\Big) &\iff \Big(\exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i \quad f(x) = y\Big) \\
&\iff (\exists x \in E\ \forall i \in I\ x \in A_i \quad \text{et} \quad f(x) = y)
\end{aligned}$$

   d'autre part

$$\begin{aligned}
\Big(y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)\Big) &\iff (\forall i \in I\ y \in f(A_i)) \\
&\iff (\forall i \in I\ \exists x_i \in A_i\ y = f(x_i))
\end{aligned}$$

   Cependant on n'a qu'une implication

$$(\exists x \in E\ \forall i \in I\ x \in A_i \quad \text{et} \quad f(x) = y) \implies (\forall i \in I\ \exists x_i \in A_i\ y = f(x_i)) \qquad (x_i = x \text{ convient})$$

   donc

$$\Big(y \in f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\Big) \implies \Big(y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)\Big)$$

   Ce qui prouve l'inclusion.

2. *Pour les images réciproques. Soit $x \in F$.*

$$\begin{aligned}\left(x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)\right) &\iff \left(f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j\right)\\ &\iff (\exists j \in J\ f(x) \in B_j)\\ &\iff \big(\exists j \in J\ x \in f^{-1}(B_j)\big)\\ &\iff \left(x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)\right).\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité $f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

$$\begin{aligned}\left(x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)\right) &\iff \left(f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j\right)\\ &\iff (\forall j \in J\ f(x) \in B_j)\\ &\iff \big(\forall j \in J\ x \in f^{-1}(B_j)\big)\\ &\iff \left(x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)\right).\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité $f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

3. *Cas du complémentaire. Soit $x \in E$.*

$$\Big(x \in \Big(f^{-1}(B)\Big)^c\Big) \iff \big(x \notin f^{-1}(B)\big) \iff \big(f(x) \notin B\big) \iff \big(f(x) \in B^c\big) \iff \big(x \in f^{-1}(B^c)\big).$$

Retour page 32 □

Proposition : Partition et surjection.

Soit $f : E \to F$ une application surjective. Si $(B_k)_{k\in K}$ est une partition de F alors $\left(f^{-1}(B_k)\right)_{k\in K}$ est une partition de E. En particulier, $\left(f^{-1}(\{y\})\right)_{y\in F}$ est une partition de E.

Retour page 33

Démonstration. *Soit $(B_k)_{k\in K}$ une partition de F.*

- *Comme f est surjective, tout $k \in K$, tout élément de B_k, qui est non vide, a au moins un antécédent donc $f^{-1}(B_k) \neq \varnothing$;*
- *Les parties $f^{-1}(B_k)$, $k \in K$ sont deux à disjointes : pour $k_1, k_2 \in K$ distincts $B_{k_1} \cap B_{k_2} = \varnothing$ donc*
$$f^{-1}(B_{k_1}) \cap f^{-1}(B_{k_2}) = f^{-1}(B_{k_1} \cap B_{k_2}) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$
- *Les $f^{-1}(B_k)$, $k \in K$ recouvrent E :*
$$E = f^{-1}(F) = f^{-1}(\bigcup_{k\in K} B_k) = \bigcup_{k\in K} f^{-1}(B_k).$$

Donc $\left(f^{-1}(B_k)\right)_{k\in K}$ est une partition de E.
On peut appliquer ce raisonnement à la partition $\left(\{y\}\right)_{y\in F}$ de F, ce qui donne la seconde assertion.

□

Proposition : Cardinal d'une union

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie (I est fini) d'ensembles finis (chaque A_i est fini) deux à deux disjoints alors

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \operatorname{card}(A_i).$$

En particulier, si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de A,

$$\operatorname{card} A = \sum_{i\in I} \operatorname{card}(A_i).$$

Retour page 36

Démonstration. *C'est immédiat en raisonnant par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Quitte à renuméroter, on peut supposer que dans la formule à démontrer, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.*
Si $\operatorname{card} I = 1$ il n'y a rien à faire.
Si $\operatorname{card} I = 2$, on a $\operatorname{card}(A_1 \sqcup A_2) = \operatorname{card} A_1 + \operatorname{card} A_2$. (voir le paragraphe 2.3.2). Supposons avoir démontré le résultat jusqu'à un ordre $n \geq 2$. Considérons $I = \{1, 2, \ldots, n+1\}$. On a en utilisant l'ordre 2 de la récurrence

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \operatorname{card}\left[\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \sqcup A_{n+1}\right] = \operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \operatorname{card} A_{n+1}$$

et en utilisant l'ordre n de la récurrence

$$\operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \operatorname{card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \operatorname{card} A_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card} A_i + \operatorname{card} A_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{card} A_i = \sum_{i\in I} \operatorname{card} A_i.$$

□