Equations différentielles du premier ordre. TD 1

Exercice 1 *Résoudre le problème de Cauchy:*

$$\begin{cases} y' + 2xy = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 2 *Résoudre le problème de Cauchy:*

$$\begin{cases} y' - 4xy^2 = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Exercice 3 *Résoudre le problème de Cauchy:*

$$\begin{cases} yy' + (1 + y^2)\sin x = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 4 *Résoudre le problème de Cauchy:*

$$\begin{cases} x'(t) = tx^2(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

en fonction de la donnée initiale x_0.

Exercice 5 *Une équation différentielle est dite homogène si on peut la mettre sous la forme* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ *pour* $x \neq 0$, *où* f *est une fonction dérivable.*

1. *On suppose* $f(t_0) = t_0$. *Montrer que* $y = t_0 x$ *est solution de l'équation.*
2. *On suppose que la fonction* $u \mapsto f(u) - u$ *ne s'annule pas. On pose* $t(x) = \frac{y(x)}{x}$. *Montrer que* t *est solution d'une équation à variables séparées que l'on déterminera.*
3. *Résoudre l'équation* $y'x^2 - 2xy + y^2 = 0$ *sur* $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6 *Résoudre l'équation différentielle suivante:*

$$2x^2y' + y^2 = 1.$$

Exercice 7 *Résoudre les équations différentielles linéaires (ou apparentées) suivantes:*

(a) $xy' + y = \dfrac{1}{x^2y^2}$.

(b) $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$.

(c) $(1 - x^2)y' + xy = \dfrac{1}{x} - x + x\ln x$.

(d) $y' = 1 + \dfrac{1}{x - y}$.

(e) $y'\sin^2 x - y\tan x + \tan x = 0$