Equations différentielles du premier ordre. TD 2

Exercice 1 *Résoudre l'équation différentielle*

$$(x+1)y'(x) + y(x) = (x+1)\sin(x)$$

sur des intervalles à préciser.

Exercice 2 *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y'(x) + (3x^2+1)y(x) = x^2e^{-x}, \quad \textit{avec} \quad y(0) = 1.$$

Exercice 3 *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y'(x) + (3x^2-1)y(x) = x^2e^{x}, \quad \textit{avec} \quad y(0) = -1.$$

Exercice 4 *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y'(x) + \frac{1}{x-1}y(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}, \quad \textit{avec} \quad y(0) = 1.$$

Exercice 5 *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y'(x) + (4x^3+5)y(x) = x^3e^{-5x}, \quad \textit{avec} \quad y(0) = 1.$$

Exercice 6 *Etablir s'il existe des solutions de* $y'(x) = -2y(x) + e^{-2x}$ *qui ont une dérivée nulle en* $x = 0$.

Exercice 7 *Etablir s'il existe des solutions de* $y'(x) = -2xy(x) + x$

Exercice 8 *Une équation différentielle de Bernoulli est de la forme* $a(x)y' + b(x)y + c(x)y^{n+1}$ *avec des fonctions différentiables* a, b, c *et un entier* $n \geq 1$.

1. *On considère une solution* y *non nulle de l'équation, et on pose* $z = \dfrac{1}{y^n}$. *Vérifier que* z *satisfait une équation différentielle que l'on déterminera.*
2. *Résoudre les équations différentielles suivantes*
   (a) $xy' + xy = y^2 \ln x \qquad x > 0$
   (b) $x^2y' - xy + y^3 = 0.$

Exercice 9 *On considère une population de taille* N *à l'instant* t. *Sa croissance relative à l'instant* t *est le rapport* $\dfrac{N'(t)}{N(t)}$.

1. *On suppose la croissance relative constante égale à* a. *Exprimer la population* $N(t)$ *en fonction de* $N_0 = N(0)$, *de* a *et de* t. *Que se passe-t-il si* $a > 0$, *si* $a < 0$ *et si* $a = 0$ *?*
2. *On suppose la croissance relative de la forme* abN , *avec* $a, b > 0$. *Exprimer la population* $N(t)$ *en fonction de* $N_0 = N(0)$, *de* a, *de* b *et de* t *en utilisant l'exercice précédent.*