Feuille de TD n°5

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x+y+z=0$, puis de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite de vecteur directeur $u=(3,4)$.

Exercice 3.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D de vecteur directeur $u=(1,-2,2)$. Quel est son déterminant ?
2. Donner la matrice de la réflexion par rapport à $D^\perp$. Quel est son déterminant ?

Exercice 4. Soit E un espace euclidien de dimension n, et u une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace H de dimension k. Donner le déterminant de toute matrice de u dans une base orthonormale de E.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme de E dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que A est la matrice d'une symétrie orthogonale. Déterminer le sous-espace par rapport auquel c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 6. Soit $E=\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires. Montrer que $\mathcal{I}=\mathcal{P}^\perp$.
2. Soit $\varphi : f\mapsto \hat{f}$ avec $\hat{f}(x)=f(-x)$. Montrer que φ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable pour $u\in\mathcal{L}(E)$ si et seulement si $F^\perp$ est stable pour u^*.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f\in\mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Démontrer que f^* est un projecteur.
2. Montrer que $f^*=f$ si et seulement si f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.
3. On suppose que f et f^* commutent.
   - Démontrer que $f\circ f^*$ est une projection orthogonale
   - Démontrer que $\ker(f\circ f^*)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0\}$.
   - En déduire que $\ker(f\circ f^*)=\ker(f)$ et que $\mathrm{Im}(f\circ f^*)=\mathrm{Im}(f)$.
4. En déduire que f et f^* commutent si et seulement si $f=f^*$.

Exercice 9. Identifier les endomorphismes de matrice :

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix},\quad C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad D=\frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4\\ -4 & 4 & -7\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$$

Préciser lesquels sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$ (et les diagonaliser).

Réponse. • La matrice A est symétrique et orthogonale, c'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale.

$$A-I_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On pose $V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $V_3 = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. La famille (V_1, V_2, V_3) est orthonormale, $\ker(A - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$ et $\mathrm{im}(A - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_2 \oplus^{\perp} \mathbb{R}\cdot V_3$. Ainsi A représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\ker(A - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$ (c'est à dire une rotation d'angle π). La matrice A est orthodiagonalisable dans $\mathbb{R}$: si P est la matrice (de passage) dont les colonnes sont V_1, V_2, V_3, alors $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tPAP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

• La matrice B est orthogonale (les colonnes sont orthogonales, de norme 1), c'est donc la matrice d'une transformation orthogonale (symétrie, rotation, ou rotation miroir).

$$B - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&-1&1\\-1&-2&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

On pose $V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $V_3 = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. La famille (V_1, V_2, V_3) est orthonormale directe ($\det(V_1, V_2, V_3) = 1$), $\ker(B - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$ et $\mathrm{im}(B - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_2 \oplus^{\perp} \mathbb{R}\cdot V_3$. Ainsi B représente une rotation d'axe la droite $\ker(B - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$. L'angle θ satisfait $1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr} B = 2$, donc $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Si on oriente l'axe par V_1 (ou son orthogonal par (V_2, V_3)), alors $\langle BV_2 \mid V_3\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$. La matrice B n'est pas diagonalisable. Si P est la matrice dont les colonnes sont V_1, V_2, V_3, alors $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tPBP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

• La matrice C est orthogonale (les colonnes sont orthogonales, de norme 1), c'est donc la matrice d'une transformation orthogonale (symétrie, rotation, ou rotation miroir).

$$C - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5&-1&2\\2&-5&1\\1&2&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-5&1&0\\2&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

On pose $V_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $V_3 = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$. La famille (V_1, V_2, V_3) est orthonormale directe ($\det(V_1, V_2, V_3) = 1$), $\ker(C - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$ et $\mathrm{im}(C - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_2 \oplus^{\perp} \mathbb{R}\cdot V_3$. Ainsi C représente une rotation d'axe la droite $\ker(C - I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$. L'angle θ satisfait $1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr} C = -\frac{2}{3}$, donc $\cos\theta = -\frac{5}{6}$. Si on oriente l'axe par V_1 (ou son orthogonal par (V_2, V_3)), alors $\langle CV_2 \mid V_3\rangle = \frac{\sqrt{11}}{6} > 0$ donc $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$. La matrice C n'est pas diagonalisable. Si P est la matrice dont les colonnes sont V_1, V_2, V_3, alors $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tPCP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{5}{6}&-\frac{\sqrt{11}}{6}\\0&\frac{\sqrt{11}}{6}&-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$.

• La matrice D est orthogonale (les colonnes sont orthogonales, de norme 1), c'est donc la matrice d'une transformation orthogonale (symétrie, rotation, ou rotation miroir).

$$D - I_3 = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix}17&1&-4\\-4&13&-7\\1&8&13\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}17&137&1\\-4&45&0\\1&0&0\end{pmatrix}. \quad D + I_3 = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&1&-4\\-4&-5&-7\\1&8&-5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\-4&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

D est la matrice d'une anti-rotation (ou rotation miroir). On pose $V_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $V_3 = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$. La famille (V_1, V_2, V_3) est orthonormale directe ($\det(V_1, V_2, V_3) = 1$), $\ker(D + I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$ et $\mathrm{im}(D + I_3) = \mathbb{R}\cdot V_2 \oplus^{\perp} \mathbb{R}\cdot V_3$. Ainsi C représente une rotation miroir d'axe la droite $\ker(D + I_3) = \mathbb{R}\cdot V_1$. L'angle θ satisfait $-1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr} D = -\frac{16}{9}$, donc $\cos\theta = -\frac{7}{18}$. Si on oriente l'axe par V_1 (ou son orthogonal par (V_2, V_3)), alors $\langle DV_2 \mid V_3\rangle = -\frac{5\sqrt{11}}{18} < 0$ donc $\theta = -\arccos\left(-\frac{7}{18}\right) \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$. La matrice C n'est pas diagonalisable. Si P est la matrice dont les colonnes sont V_1, V_2, V_3, alors $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tPCP = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{7}{18}&\frac{5\sqrt{11}}{18}\\0&-\frac{5\sqrt{11}}{18}&-\frac{7}{18}\end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant $A{}^tA = {}^tAA$. Montrer que la matrice $\Omega = {}^tA^{-1}A$ est orthogonale.

Réponse. $\Omega {}^t\Omega = {}^tA^{-1}A \cdot {}^tAA^{-1} = {}^tA^{-1}{}^tA \cdot AA^{-1} = I_n$. Donc Ω est orthogonale.

Exercice 11. Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $f(F^{\perp}) = f(F)^{\perp}$.

Réponse. Soient $y_1 \in f(F^{\perp})$, et $y_2 \in f(F)$. Alors $x_1 \in F^{\perp}$ et $x_2 \in F$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. On a donc :

$$\langle y_1 \mid y_2 \rangle = \langle f(x_1) \mid f(x_2) \rangle = \langle x_1 \mid x_2 \rangle = 0.$$

On en déduit que $f(F^{\perp})$ et $f(F)$ sont orthogonaux et donc que $f(F^{\perp}) = f(F)^{\perp}$ (on est en dimension finie).

Exercice 12. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que : $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}\big)$.
2. Montrer que : $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S = 1\big)$.
3. Montrer que M est une matrice de rotation si, et seulement si, il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$. Indiquer les éléments de la rotation.

Réponse. Pocons $\delta = a^2 + b^2 + c^2 = S^2 - 2\sigma$

$${}^tMM = \begin{pmatrix} \delta & \sigma & \sigma \\ \sigma & \delta & \sigma \\ \sigma & \sigma & \delta \end{pmatrix} \qquad \det M = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} = S(\delta - \sigma) = S(S^2 - 3\sigma)$$

Ainsi :

1. $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff {}^tMM = I_3 \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1\big)$.
2. $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \iff (M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \text{ et } \det M = 1) \iff \big(\sigma = 0 \text{ et } S = 1\big)$.
3. M est une matrice de rotation si, et seulement si, $M \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ c'est à dire $\sigma = 0$ et $S = 1$. Supposons que ce soit le cas. Alors
$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - SX^2 + \sigma X - abc = X^3 - X^2 - abc.$$
Or un polynôme P de degré 3 admet trois racines réelles (avec multiplicité) si et seulement si sa dérivée s'annule en deux points (avec multiplicité) en lesquels P prend des valeurs de signes contraire. Ici, P est du type $P = X^3 - X^2 + k$ et $P' = X(3X-2)$ s'annule en 0 et $\frac{2}{3}$. Ainsi P admet trois racines réelles si et seulement si
$$P(0) \times P\Big(\frac{2}{3}\Big) = k\Big(k - \frac{4}{27}\Big) \leq 0$$
on doit donc avoir $k = -abc \in [0, 4/27]$. Réciproquement si a, b, c sont racines d'un tel polynôme alors $k = abc$, $S = 1$ et $\sigma = 0$.
$$M - I_3 = \begin{pmatrix} a-1 & b & c \\ c & a-1 & b \\ b & c & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a-1 & b & 0 \\ c & a-1 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$
Si $a = 1$, $M = I_3$. Sinon $M - I_3$ est de rang 2 et $\ker(M - I_3)$ est engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'angle θ satisfait $\cos\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} M - 1) = \frac{3a-1}{2}$.

Exercice 13. On considère des réels a, b, c. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition A est-elle orthogonale ?
2. Cette condition étant réalisée, reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique A.

Réponse.

1. Pour que les colonnes soient deux à deux orthogonales, et de norme 1, il faut et suffit que :
$$ab(a^2+b^2+c^2-1)=cb(a^2+b^2+c^2-1)=ac(a^2+b^2+c^2-1)=0$$
$$(a^2+1)(a^2+b^2+c^2-1)=(b^2+1)(a^2+b^2+c^2-1)=(c^2+1)(a^2+b^2+c^2-1)=0$$
ce qui donne $a^2+b^2+c^2=1$.
2. On se place dans le cas où $a^2+b^2+c^2=1$. Le cas $a^2=1, b=c=0$ est évident. Supposons $a^2<1$. On cherche les vecteurs invariants. Raisonnons par équivalence sur les lignes de $A-I_3$:
$$A-I_3=\begin{pmatrix} a^2-1 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2-1 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2c & 2b \\ ab+c & b^2-1 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2c & 2b \\ ab+c & b^2+c^2-1 & -a \\ ac-b & a & b^2+c^2-1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ ab+c & -a^2 & -a \\ ac-b & a & -a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ ac-b & a & -a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$
cette dernière matrice est de rang 2, son noyau étant la droite engendré par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Comme on a raisonné sur les lignes c'est aussi le noyau de $A-I_3$ donc A représente une rotation autour de ce noyau d'angle θ satisfaisant $\cos\theta=\frac{3a^2-1}{2}$.

Exercice 14. Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on désigne par u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :
$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{O}^+(E)$.
2. Soit H un hyperplan de E d'équation $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=0$ où les α_i ne sont pas tous nuls. Déterminer l'image de H par u.

Réponse.
1. La matrice A est orthogonale (les colonnes sont orthogonales, de norme 1) donc $u \in \mathcal{O}(E)$. de plus
$$\det A=\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1$$
donc $u \in \mathcal{O}_+(E)=\mathcal{SO}(E)$.
2. H est orthogonal au vecteur de coordonnées $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. Or
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \end{pmatrix}$$
donc $u(H)$ est l'hyperplan d'équation
$$(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)x_1+(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)x_2+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)x_3+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x_4=0.$$

Exercice 15. On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire
$$\langle P \mid Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la relation
$$u(P)(x)=\int_0^1 (x+t)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$
définit un endomorphisme u de l'espace E.

2. Vérifier que l'endomorphisme u est symétrique.
3. Calculer la trace de u.

Réponse.

1. Il est clair que par linéarité de l'intégrale, u est linéaire, à valeurs dans les polynômes de degré au plus n. Donc u est un endomorphisme de l'espace E.
2. Pour P et Q dans E on a, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\langle P \mid u(Q)\rangle &= \int_0^1 \left(P(x)\int_0^1 (x+t)^n Q(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+t)^n P(x)Q(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+t)^n P(x)Q(t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(Q(t)\int_0^1 (t+x)^n P(t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \langle u(P) \mid Q\rangle\end{aligned}$$

   Sans le théorème de Fubini, on peut aussi calculer les produits scalaires $\langle u(X^k) \mid X^\ell\rangle$ $k, \ell \in \{0, \cdots, n\}$ et constater qu'ils sont symétriques.
3. Considérons un autre produit scalaire $\langle\!\langle \cdot \mid \cdot \rangle\!\rangle$ dans lequel la famille $1, X, \dots, X^n$ est orthonormale. Pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$\int_0^1 (x+t)^n t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\int_0^1 t^{n-\ell+k}\,\mathrm{d}t \cdot x^\ell = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\frac{x^\ell}{n-\ell+k+1}$$

   donc

$$u(X^k) = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\frac{1}{n-\ell+k+1}X^\ell$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} u &= \sum_{k=0}^{n}\langle\!\langle u(X^k) \mid X^k\rangle\!\rangle = \sum_{k=0}^{n}\langle\!\langle \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\frac{1}{n-\ell+k+1}X^\ell \mid X^k\rangle\!\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}.\end{aligned}$$

Merci à Théodore de m'avoir signalé une erreur dans ce corrigé.