Université de Bourgogne Année 2018-2019
L2 29 mars

Examen de Géométrie.

Exercice 1.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4, quatre points non coplanaires, et M un point de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. On suppose que le plan (MA_1A_2) (resp. (MA_2A_3), resp. (MA_3A_4), resp. (MA_4A_1)) rencontre la droite (A_3A_4) (resp. (A_4A_1), resp. (A_1A_2), resp. (A_2A_3)) en un point B_1 (resp. B_2, resp. B_3, resp. B_4). Montrer que B_1, B_2, B_3, B_4 sont coplanaires.

Exercice 2.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} + 4u_{n+1} + 5u_n = n.$$

1. Chercher une suite particulière (simple) solution de cette équation.
2. En déduire que $\mathscr{E}$ est un espace affine. On note E sa direction vectorielle.
3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de la direction vectorielle E.
   (a) Montrer que si (a_0, a_1) et (b_0, b_1) sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont dans E ;
   (b) En déduire que E (et donc $\mathscr{E}$) est de dimension 2.
4. Déterminer la forme générale des éléments de $\mathscr{E}$ en fonction de n.

Exercice 3.

Soient A,B, C et D quatre points d'affixes respectives 1, $e^{\frac{i\pi}{3}}$, $\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{-i\pi}{6}}$. On note aussi O le point d'affixe 0.

1. Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe f de F.
6. On considère la transformation φ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec
   $$z' = e^{\frac{-2i\pi}{3}} z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   Déterminer la nature de φ et ses éléments caractéristiques.

Exercice 4.

Soit ABC un triangle. On construit les carrés $ACLM$ et $ANPB$ extérieurement au triangle ABC et l'on appelle E le milieu de $[BC]$. Montrer que (EA) est perpendiculaire à (MN) et que $MN = 2EA$.