
Examen de Géométrie. Math 4C

Exercice 1. Soit $ABCD$ un tétraèdre dans l'espace affine de dimension 3.

1. On se place dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
 - (a) Soit I le milieu de $[BC]$. Donner une équation cartésienne du plan contenant les points A , I et D
 - (b) Soit O l'isobarycentre des trois points B, C, D . Donner des équations cartésiennes de la droite (AO)
 - (c) Soit J le milieu de $[AB]$. Donner une équation cartésienne du plan \mathcal{P} contenant J et dirigé par \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{JC} .
 - (d) Déterminer les coordonnées du point G à l'intersection de \mathcal{P} et (AO) .
 - (e) Que pouvez vous dire sur G ?
2. On se place dans le repère affine (A, B, C, D) .
 - (a) Pour l'une des droites passant par G et un sommet du tétraèdre, exprimer en termes de barycentres l'appartenance d'un point M à cette droite.
 - (b) En quel point l'une des droites précédentes intersecte-t-elle la face opposée au sommet ? Justifier.
 - (c) Exprimer G comme barycentre des points A, I, D .

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré direct du plan affine euclidien. Caractériser la similitude directe σ de centre A envoyant B sur C .

Exercice 3. Soient $ABCD$ un quadrilatère du plan affine euclidien et M_1, M_2, M_3 et M_4 des points extérieurs au quadrilatère $ABCD$ tels que les triangles ABM_1, BCM_2, CDM_3 et ADM_4 sont isocèles rectangles en M_1, M_2, M_3, M_4 . Montrer que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ sont orthogonaux de même longueur.

Exercice 4. Soient A, B, C trois points non alignés dans le plan affine. Un point M décrit le segment $[AB]$ et un point N décrit le segment $[AC]$. Quel est le lieu décrit par le milieu du segment $[MN]$?

Exercice 5. On rappelle les énoncés des théorèmes de Ménélaüs et de Céva. Soit ABC un triangle non aplati dans un plan affine, et soient A_0, B_0 et C_0 des points respectivement de (BC) , (AC) et (BC) distincts de A, B et C .

Théorème de Ménélaüs. Les points A_0, B_0, C_0 sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{B_0C}}{\overline{B_0A}} \cdot \frac{\overline{C_0A}}{\overline{C_0B}} = 1.$$

Théorème de Céva. Les droites $(A_0A), (B_0B), (C_0C)$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{B_0C}}{\overline{B_0A}} \cdot \frac{\overline{C_0A}}{\overline{C_0B}} = -1.$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser les théorèmes de Ménélaüs et de Céva, ainsi que le théorème de Thalès (on pourra considérer par exemple la droite parallèle à $(A'B')$ passant par A) ou utiliser les barycentres.

Soit ABC un triangle. Soient A' un point de $[BC]$, B' un point de $[AC]$ et C' un point de $[AB]$. On suppose de plus que les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en P , les droites (BC) et $(B'C')$ sécantes en Q , et les droites (AC) et $(A'C')$ sécantes en R . Montrer l'équivalence suivante :

$$(P, Q \text{ et } R \text{ sont alignés}) \text{ si et seulement si } ((AA'), (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont concourantes}).$$