COURS DE GEOMETRIE
Licence de mathématiques
$2^{\text{ième}}$ année

Olivier Couture
Université de Bourgogne

Table des matières

Chapitre 1

Rappels de géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1.1 Structures vectorielle et affine de $\mathbb{R}^d$

1.1.1 Structure vectorielle

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

En dehors de tout aspect géométrique, les éléments de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ne sont rien d'autre que des **couples de nombres** (x, y) sur lesquels on effectue deux opérations :

— **Addition** (c'est une la loi interne)

$$+ : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \mapsto & (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{array}$$

— **Multiplication par un scalaire** * (c'est une loi externe)

$$\cdot : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \big(\lambda, (x, y)\big) & \mapsto & (\lambda \times x, \lambda \times y) \end{array}$$

(le $\cdot$ est souvent omis pour simplifier les écritures).

Ces deux opérations confèrent à $\mathbb{R}^2$ une structure d'**espace vectoriel réel**. Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont alors appelés vecteurs. Du fait de la nature très particulière de $\mathbb{R}^2$, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit tout naturellement

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

Autrement dit, les deux vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$ forment la base **canonique** de $\mathbb{R}^2$ (le mot canonique signifiant qu'elle est intrinsèquement liée à la définition de $\mathbb{R}^2$).

Évidemment, ces définitions se généralisent à $\mathbb{R}^d$ pour $d \in \mathbb{N}$. Le nombre d est la dimension de l'espace vectoriel. On dit aussi que $\mathbb{R}$ est une **droite vectorielle**, $\mathbb{R}^2$ un **plan vectoriel**, $\mathbb{R}^3$ un **espace vectoriel tri-dimensionnel**.

Sous-espaces vectoriels

- Dans $\mathbb{R}^2$, si $\vec{v} = (a, b)$ est un vecteur non nul, l'ensemble $\vec{\mathscr{D}} = \mathrm{Vect}\{\vec{v}\} = \{\lambda \cdot \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ des couples proportionnels à $\vec{v}$ (on dit que les vecteurs sont **colinéaires** à $\vec{v}$) est lui-même un espace vectoriel (donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$), de dimension 1, donc une **droite vectorielle** et $\vec{v}$ est une base de $\vec{\mathscr{D}}$.

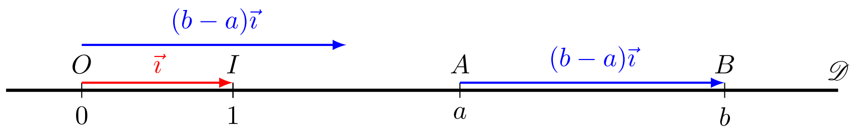
*. Mot introduit par William Hamilton pour distinguer les réels parmi les quaternions

- De même dans $\mathbb{R}^3$, si $\vec{v} = (a, b, c)$ est un vecteur non nul, l'ensemble $\vec{\mathscr{D}} = \mathrm{Vect}\{\vec{v}\} = \{\lambda \cdot \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel, de dimension 1, donc une **droite vectorielle** et $\vec{v}$ est une base de $\vec{\mathscr{D}}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, si $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ sont deux vecteurs linéairement indépendants, c'est à dire
$$\Big(\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 = (0,0,0) = \vec{0}\Big) \implies \Big(\lambda_1 = \lambda_2 = 0\Big)$$
l'ensemble $\vec{\mathscr{P}} = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ est un **plan vectoriel** (un sous-espace vectoriel de dimension 2), et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\vec{\mathscr{P}}$.
Exercice. Que se passe-t-il si les deux vecteurs sont linéairement liés ?
- Attention à ne pas commettre l'erreur fréquente suivante :
  - $\mathbb{R}$ n'est pas une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$! $\mathbb{R}$ n'est même pas contenu dans $\mathbb{R}^2$. En revanche $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}$ sont des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, ce sont les deux axes de coordonnées.
  - De même $\mathbb{R}^2$ n'est pas un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$! Cependant, $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ sont les trois plans de coordonnées de $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{R} \times \{(0,0)\}$, $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ et $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}$ sont les trois axes de coordonnées.

1.1.2 Structure affine

On représente souvent géométriquement $\mathbb{R}$ par une « droite affine » $\mathscr{D}$ dirigée par un vecteur non nul $\vec{\imath}$ et sur laquelle on a placé une origine O. Le couple $(O, \vec{\imath})$ est un **repère affine** de la droite. Chaque point M est repéré par une abscisse $x \in \mathbb{R}$, en particulier O par l'abscisse 0, et à tout couple (A, B) de points, A d'abscisse a et B d'abscisse b de $\mathscr{D}$ on associe le vecteur
$$\overrightarrow{AB} = (b - a)\vec{\imath}.$$
On note souvent $b - a = \overline{AB}$ et on l'appelle la **mesure algébrique** de AB.

Une alternative au repère affine $(O, \vec{\imath})$ consiste à se donner deux points (O, I) de sorte que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ (autrement dit I a pour abscisse 1).



La relation d'addition des vecteurs se traduit alors par le relation de Chasles :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$
On peut ainsi voir les vecteurs comme des « **vecteurs**[†] **de translation** » le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant celui qui permet de translater A sur B. On note d'ailleurs fréquemment
$$B = A + \vec{u} \quad \text{signifiant : } B \text{ est l'image de } A \text{ par translation de vecteur } \vec{u}, \text{ autrement dit } \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$
La somme $\overrightarrow{AC}$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ correspond, à travers la relation de Chasles à la composée des deux translations, d'abord de A vers B puis de B vers C.

Tout ceci se généralise à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (et même $\mathbb{R}^d$ pour $d > 3$).

Prenons le cas de $\mathbb{R}^2$ (on laisse aux lecteur le soin d'imaginer la même situation pour $\mathbb{R}^3$). On représente géométriquement $\mathbb{R}^2$ par un « plan affine » $\mathscr{P}$ rapporté à un point O, l'origine, et deux vecteurs non colinéaires $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Le triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un **repère affine** du plan. Chaque point M est repéré par

†. c'est le sens étymologique du mot vecteur – de *vehere* qui veut dire transporter – introduit par Pierre-Simon de Laplace, qui parlait de rayon-vecteur.

deux coordonnées $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (abscisse et ordonnée), en particulier O a pour coordonnées $(0,0)$, À tout couple (A,B) de points, A de coordonnées (a_1,a_2) et B de coordonnées (b_1,b_2) de $\mathscr{P}$ on associe le vecteur

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1)\vec{e}_1+(b_2-a_2)\vec{e}_2.$$

On parle également du repère affine formé des trois points (O,E_1,E_2) si $\overrightarrow{OE_1}=\vec{e}_1$ et $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e}_2$. La relation d'addition des vecteurs se traduit alors par le relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

À nouveau, on peut voir les vecteurs comme des « **vecteurs de translation** », le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant celui qui permet de translater A sur B, mais aussi X sur Y si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XY}$. On note encore

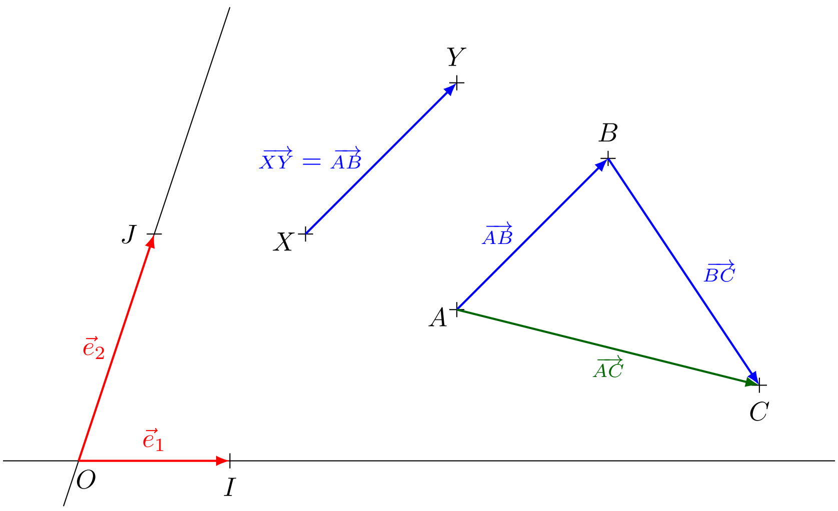
$$B=A+\vec{u}\quad\text{signifiant que } B \text{ est l'image de } A \text{ par translation de vecteur } \vec{u}\text{, autrement dit } \vec{u}=\overrightarrow{AB}$$

La somme $\overrightarrow{AC}$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ correspond, à travers la relation de Chasles à la composée des deux translations, d'abord de A vers B puis de B vers C.

Nota Bene

La donnée d'un couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ peut donc désigner soit les coordonnées d'un point A, soit le vecteur $\vec{v}=(a,b)$. On a en fait donné une structure d'**espace affine** à $\mathbb{R}^2$. On reviendra plus tard sur la définition précise d'espace affine.

Un abus de notation courant consiste à écrire $A\in\mathbb{R}^2$ et « $A=(a,b)$ » à la place de « A le point du plan $\mathscr{P}$ (représentant $\mathbb{R}^2$) de coordonnées (a,b) ». Cela peut créer des confusions entre les deux notions de point et de vecteur. Dans la mesure du possible, j'éviterai cette notation. J'écrirai plutôt $A(a,b)$.



1.2 Droites affines de $\mathbb{R}^2$

1.2.1 Équations de droites de $\mathbb{R}^2$

Une **droite affine** Δ du plan $\mathscr{P}$ représentant $\mathbb{R}^2$ est définie par la donnée d'un point M_0 et d'un vecteur non nul $\vec{v} = (a, b)$, dit **vecteur directeur**. On note souvent $\Delta = \mathcal{D}(M_0, \vec{v})$.

$$\Delta = \left\{ M \in \mathscr{P} : \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v} \right\}$$

On dit que c'est un **espace affine de dimension 1**, car la **droite vectorielle associée** $\vec{\Delta} = \operatorname{Vect}\{\vec{v}\} = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$, appelée la **direction vectorielle** de Δ est de dimension 1. Plus concrètement, les points de Δ varient selon le seul paramètre t (un seul degré de liberté).

$\boxed{\textbf{Représentation paramétrique}}$

Si M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0), un point M appartient à Δ si ses coordonnées (x, y) satisfont le système d'équations paramétriques

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \left(\text{Remarque : } \vec{\Delta} : \left\{ \begin{array}{l} x = a\,t \\ y = b\,t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R} \right)$$

$\boxed{\textbf{Équation cartésienne}}$

En éliminant le paramètre t, on obtient l'**équation cartésienne**. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \big(M \in \Delta\big) &\iff \big(\exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}\big) \iff \big(\det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{v}) = 0\big) \iff \left(\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \right) \\ &\iff \Big(b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0\Big) \end{aligned}$$

Autrement dit, l'**équation cartésienne** $bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0$ caractérise la droite Δ.

Inversement, compte tenu des équivalences ci-dessus, la donnée d'un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ définit la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, de vecteur directeur $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$ passant parle point de coordonnées $\big(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0\big)$ si $\alpha \neq 0$ ou $\big(0, -\frac{\gamma}{\beta}\big)$ si $\beta \neq 0$. On note souvent une droite du plan donnée par son équation cartésienne de façon suivante :

$$\mathscr{D} : \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Nota Bene

On rappelle que la codimension d'un sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est la dimension d'un supplémentaire de F dans E autrement dit

$$\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F.$$

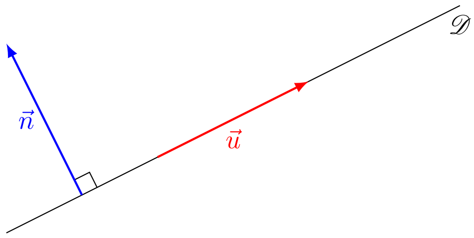
De la même façon pour **une droite affine du plan est de codimension 1** (il y a une seule « contrainte (équation) » dans l'espace de dimension 2.

Remarques 1.2.1

1. Si on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel $\langle (x, y) \mid (x', y') \rangle = xx' + yy'$, on peut interpréter le vecteur non nul $\vec{n} = (\alpha, \beta)$ comme étant **normal** à $\mathscr{D}$, c'est à dire orthogonal à $\mathscr{D}$: si M_0 de coordonnées (x_0, y_0) est un point de $\mathscr{D}$ alors pour tout point M du plan de coordonnées

(x, y), on a les équivalences :

$$\left(\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}\right) \iff \left(\langle (x-x_0, y-y_0) \mid (\alpha, \beta)\rangle = 0\right) \iff \left(\alpha x + \beta y = \alpha x_0 + \beta y_0 = -\gamma\right)$$
$$\iff \left(M \in \mathscr{D}\right)$$



2. La direction vectorielle de $\mathscr{D}$: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est la droite vectorielle $\vec{\mathscr{D}}$: $\alpha x + \beta y = 0$. Si on considère la **forme linéaire**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \alpha x + \beta y \end{array}$$

on a $\vec{\mathscr{D}} = \ker f = f^{-1}(\{0\})$ et $\mathscr{D} = f^{-1}(\{-\gamma\})$.

Autres représentations

— Droite (AB) passant par deux points distincts A de coordonnées (x_A, y_A) et B de coordonnées (x_B, y_B) a pour représentation paramétrique **barycentrique** (on reviendra sur la notion de barycentre) :

$$(AB) : \left\{ \begin{array}{l} x = t\,x_B + (1-t)x_A \\ y = t\,y_B + (1-t)y_A \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

— Équation cartésienne réduite (droite « non verticale ») :

$$\Delta : \quad y = mx + p \qquad m = \text{pente (ou coefficient directeur)} \quad p = \text{ordonnée à l'origine}$$

$$\Delta : \quad y = m(x - x_0) + y_0 \qquad \text{droite de pente } m \text{ passant par } M_0 = (x_0, y_0)$$

— Équation cartésienne **homogène** (droite coupant les axes en dehors de l'origine) :

$$\Delta : \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{droite coupant les axes en } (a,0) \text{ et } (0,b),\ ab \neq 0.$$

1.2.2 Concours de deux droites de $\mathbb{R}^2$

Cas de deux droites données par des équations cartésiennes

Soient deux droites données par leurs équations cartésiennes

$$\mathscr{D}_1 : \ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Les points coordonnées des points à l'intersection de ces deux droites satisfont le système d'équations :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right.$$

Trois cas se présentent :

1. les triplets (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnels autrement dit les déterminants suivants sont nuls
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$
alors les deux équations définissent la même droite : les droites sont **confondues**.
2. les couples (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont proportionnels mais pas les triplets (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) autrement dit les déterminants suivants sont nuls
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) \neq (0,0)$$
alors le système d'équations
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
n'a pas de solution. Les droites sont dites **strictement parallèles**.

   Exemple 1.2.2
$$\mathscr{D}_1 : \ 2x + 3y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \ 4x + 6y - 1 = 0.$$
   le système n'a pas de solution
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ 4x + 6y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases}$$

   Pour les cas 1 et 2 réunis, les droites sont dites **parallèles** au sens large.
3. les vecteurs $(-b_1, a_1)$ et $(-b_2, a_2)$ ne sont pas colinéaires autrement dit le déterminant suivant est non nul
$$\begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$
alors le système d'équations (S) a un unique couple (x, y) solution, correspondant aux point I d'intersection des deux droites. Les droites sont dites **sécantes** (en I).

   Exemple 1.2.3
$$\mathscr{D}_1 : \ 2x + 3y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \ 3x + 4y - 2 = 0.$$
   On résout le système en faisant des combinaisons linéaires des équations pour éliminer chacune des variables
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 14 & (3L_2 - 4L_1) \\ y = -10 & (3L_1 - 2L_2) \end{cases}$$

Cas de d'une équation cartésienne et d'une représentation paramétrique

Soient deux droites données l'une par une équation cartésienne l'autre par une représentation paramétrique
$$\mathscr{D}_1 : \ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2\, t \\ y = y_2 + b_2\, t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
Pour trouver les éventuels points d'intersection, on substitue les variables x et y dans l'équation de première droite par leur valeur en fonction de t de la seconde : soit $M(x_2 + a_2t, y_2 + b_2t)$ un point de $\mathscr{D}_2$,
$$\big(M \in \mathscr{D}_1\big) \iff \Big((a_1a_2 + b_1b_2)t + a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0\Big).$$
On retrouve les trois cas précédents :

1. droites confondues si $a_1a_2 + b_1b_2 = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0$;
2. droites strictement parallèles si $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ et $a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 \neq 0$.
3. droites sécantes si $a_1a_2 + b_1b_2 \neq 0$;

Exercice 1.2.4

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point et $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ une droite de $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure euclidienne usuelle. On note $\mathrm{d}(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$ la distance entre M et N. On appelle distance de M_0 à $\mathscr{D}$ le réel positif

$$\mathrm{d}(M_0, \mathscr{D}) = \inf\left\{\mathrm{d}(M_0, M) : M \in \mathscr{D}\right\}$$

1. Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par M_0 perpendiculaire à $\mathscr{D}$.
2. En déduire que
$$\mathrm{d}(M_0, \mathscr{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Cas de deux droites données par des représentations paramétriques

Soient deux droites données par des représentations paramétriques

$$\mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{l} x = x_1 + a_1\,t \\ y = y_1 + b_1\,t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{l} x = x_2 + a_2\,u \\ y = y_2 + b_2\,u \end{array}\right. \quad u \in \mathbb{R}$$

Attention dans ce cas à donner des noms différents aux paramètres ! Dans ce cas, on commence par résoudre le système (Σ) en les paramètres t et u :

$$(\Sigma) : \left\{\begin{array}{l} x_1 + a_1\,t = x_2 + a_2\,u \\ y_1 + b_1\,t = y_2 + b_2\,u \end{array}\right.$$

1. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sécantes si $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{vmatrix} = 0$: on trouve un unique couple (t, u) solution de (Σ). En reportant t dans les équations paramétriques de $\mathscr{D}_1$ et u dans les équations paramétriques de $\mathscr{D}_2$ on trouve le même pour d'intersection I
2. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si les deux équations de (Σ) sont proportionnelles.
3. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ strictement parallèles si les deux équations de (Σ) sont incompatibles.

Exemple 1.2.5

$$\mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = 3 - t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 5 + 3u \\ y = \quad - 2u \end{array}\right. \quad u \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on commence par résoudre le système (S) en les paramètres t et u :

$$\left\{\begin{array}{l} 3 + 2t = 5 + 3u \\ 3 - t = \quad - 2u \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2t - 3u = 2 \\ t - 2u = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = -5 \\ u = -4 \end{array}\right.$$

d'où le d'intersection point $I = (-7, 8)$:

$$\text{avec } \mathscr{D}_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2 \times (-5) = -7 \\ y = 3 - \quad (-5) \quad = \;\; 8 \end{array}\right. \qquad \text{avec } \mathscr{D}_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 5 + 3 \times (-4) = -7 \\ y = \quad - 2 \times (-4) = \;\; 8 \end{array}\right.$$

Exercice 1.2.6

Soient trois droites données par leurs équations cartésiennes

$$\mathscr{D}_1 : \; a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \mathscr{D}_2 : \; a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \mathscr{D}_3 : \; a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

1. Montrer que ces trois droites sont confondues ou concourantes en un unique point si et seulement si
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$
Préciser comment distinguer les deux cas confondues ou concourantes en un unique point.
2. On suppose $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sécantes en un point I. Déterminer la forme générale des équations cartésiennes des droites passant par I.

Nota Bene

Une droite affine de $\mathbb{R}^2$ est de codimension 1 : elle est définie par une seule équation cartésienne, autrement dit une seule « contrainte » dans le plan de dimension 2.
Cette équation est unique à multiplication par un scalaire près (cf. paragraphe 1.2.2).

1.3 Droites et plans de $\mathbb{R}^3$

1.3.1 Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Représentation paramétrique de droite

Comme dans le cas bi-dimentionnel, une droite affine Δ de l'espace tri-dimensionnel $\mathscr{E}$ représentant $\mathbb{R}^3$ est définie par la donnée d'un point M_0 et d'un vecteur (directeur) non nul $\vec{v} = (a, b, c)$

$$\Delta = \left\{M \in \mathscr{E} : \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}\right\}$$

C'est un espace affine de dimension 1, car les points de Δ varient selon un seul paramètre t (un degré de liberté). La **droite vectorielle associée**

$$\vec{\Delta} = \mathrm{Vect}\{\vec{v}\} = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

est appelée la **direction vectorielle** de Δ. Si M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0), un point M appartient à Δ si ses coordonnées (x, y, z) satisfont le système d'équations paramétriques

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b \\ z = z_0 + t\,c \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Remarque :

$$\vec{\Delta} : \begin{cases} x = t\,a \\ y = t\,b \\ z = t\,c \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Représentation paramétrique de plan

Un plan affine Π de l'espace tri-dimensionnel $\mathscr{E}$ représentant $\mathbb{R}^3$ est défini par la donnée d'un point M_0 et de deux vecteurs (directeur) non colinéaires $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$\Pi = \left\{M \in \mathscr{E} : \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2\right\}$$

C'est un espace affine de dimension 2, car les points de Π varient selon deux paramètres λ et μ (deux degrés de liberté). Le **plan vectoriel associé**

$$\vec{\Pi} = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

est appelé la **direction vectorielle** de Π. Si M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0), un point M appartient à Π si ses coordonnées (x, y, z) satisfont le système d'équations paramétriques

$$\Pi : \begin{cases} x = x_0 + a_1\,\lambda + a_2\,\mu \\ y = y_0 + b_1\,\lambda + b_2\,\mu \\ z = z_0 + c_1\,\lambda + c_2\,\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque :

$$\vec{\Pi} : \begin{cases} x = a_1\,\lambda + a_2\,\mu \\ y = b_1\,\lambda + b_2\,\mu \\ z = c_1\,\lambda + c_2\,\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

1.3.2 Équation cartésienne d'un plan

On obtient l'**équation cartésienne** de Π en éliminant les paramètres (λ,μ) dans le système d'équations paramétriques. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x,y,z). On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\big(M\in\Pi\big) &\iff \big(\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2\big) \iff \big(\det(\overrightarrow{M_0M},\vec{v}_1,\vec{v}_2)=0\big)\\
&\iff \left(\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2\\ y-y_0 & b_1 & b_2\\ z-z_0 & c_1 & c_2\end{vmatrix}=0\right)\\
&\iff \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}(x-x_0)-\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}(z-z_0)=0\right)
\end{aligned}$$

Autrement dit, l'**équation cartésienne**

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}(x-x_0)-\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

caractérise le plan Π.

Inversement, la donnée d'un quadruplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ où $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$ définit le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, ayant pour vecteurs directeurs deux des trois vecteurs $(0,-\gamma,\beta)$, $(-\gamma,0,\alpha)$ ou $(-\beta,\alpha,0)$, et passant par le point de coordonnées $\big(-\frac{\delta}{\alpha},0,0\big)$ si $\alpha\neq0$, par $(0,-\frac{\delta}{\beta},0)$ si $\beta\neq0$ ou par $\big(0,0,-\frac{\delta}{\gamma}\big)$ si $\gamma\neq0$. On note souvent un plan donné par son équation cartésienne de façon suivante :

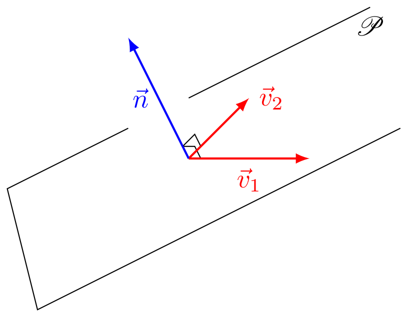
$$\mathscr{P}: \quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

> ***Nota Bene***
> **Un plan affine de $\mathbb{R}^3$ est de codimension 1** : il est défini par une seule équation cartésienne, autrement dit une seule « contrainte » dans l'espace de dimension 3.
> Cette équation est unique à multiplication par un scalaire près (cf. paragraphe 1.3.4).

Remarques 1.3.1

1. Soit un plan $\mathscr{P}: \quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$. Si on munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel $\langle(x,y,z)\mid(x',y',z')\rangle=xx'+yy'+zz'$, on interprète le vecteur non nul $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$ comme un vecteur **normal** à $\mathscr{P}$, c'est à dire orthogonal à $\mathscr{P}$. Si $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point de $\mathscr{P}$ alors pour tout point $M(x,y,z)$ de $\mathscr{E}$:

$$\begin{aligned}
\big(\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\big) &\iff \big(\langle(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\mid(\alpha,\beta,\gamma)\rangle=0\big)\\
&\iff \big(\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0=-\delta\big)\\
&\iff \big(M\in\mathscr{P}\big)
\end{aligned}$$



En particulier, pour un plan $\mathscr{P}$ passant par M_0 de vecteurs directeurs $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, le vecteur

$$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

est normal à $\mathscr{P}$ et redonne l'équation cartésienne

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0.$$

Il s'appelle le **produit vectoriel** de $\vec{v}_1$ et v_2, noté

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2.$$

2. La direction vectorielle de $\mathscr{P}: \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$ est le plan vectoriel $\vec{\mathscr{P}}: \alpha x+\beta y+\gamma z = 0$. Si on considère la **forme linéaire**

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma z \end{array}$$

on a $\vec{\mathscr{P}} = \ker f = f^{-1}(\{0\})$ et $\mathscr{P} = f^{-1}(\{-\delta\})$.

1.3.3 Autres représentations de droites et de plans

— Droite (AB) et plan (ABC) passant par trois points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$ non alignés : une représentation paramétrique **barycentrique** :

$$(AB) : \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & t\,x_B + (1-t)x_A \\ y & = & t\,y_B + (1-t)y_A \\ z & = & t\,z_B + (1-t)z_A \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$(ABC) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & \lambda\,x_C & + & \mu\,x_B + (1-\lambda-\mu)x_A \\ y & = & \lambda\,y_C & + & \mu\,y_B + (1-\lambda-\mu)y_A \\ z & = & \lambda\,z_C & + & \mu\,z_B + (1-\lambda-\mu)z_A \end{array} \right. \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

— Équation cartésienne **homogène** (plan coupant les axes en dehors de l'origine) :

$$\Pi : \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \text{plan coupant les axes en } (a, 0, 0),\ (0, b, 0) \text{ et } (0, 0, c),\ abc \neq 0.$$

1.3.4 Concours de deux plans - Équations cartésiennes de droites de $\mathbb{R}^3$

Soient deux plans donnés par leurs équations cartésiennes

$$\mathscr{P}_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Les coordonnées (x, y, z) des points à l'intersection de ces deux plans satisfont le système d'équations :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array}\right.$$

Trois cas se présentent :

1. Les quadruplets (a_1, b_1, c_1, d_1) et (a_2, b_2, c_2, d_2) sont proportionnels alors les deux équations définissent le même plan : les plans sont **confondus**.
2. les triplets (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont proportionnels mais pas les quadruplets (a_1, b_1, c_1, d_1) et (a_2, b_2, c_2, d_2) alors le système d'équations (S) n'a pas de solution. Les plans sont dits **strictement parallèles**.
   Pour les cas 1 et 2 réunis, les plans sont dits **parallèles** au sens large.
3. Les triplets (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne sont pas proportionnels autrement dit un des trois déterminants suivant est non nul

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

   alors le système d'équations (S) admet une droite de solutions, de vecteur directeur $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Exercice 1.3.2

(a) Déterminer un point particulier de $\mathscr{D}$ si on sait que $\alpha \neq 0$. Faire de même si on sait que $\beta \neq 0$ puis $\gamma \neq 0$.

(b) Étant donnée une droite $\mathscr{D}$ passant par un point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et de vecteur directeur $\vec{u} = (a, b, c)$, c'est à dire définie par le système d'équations paramétriques

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b \\ z = z_0 + t\,c \end{array}\right. \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On suppose a non nul. Vérifier que $\mathscr{D}$ est l'intersection de ces deux plans définis par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \\ c(x - x_0) - a(z - z_0) = 0 \end{array}\right.$$

Que dire si $a = 0$?

Exemple 1.3.3

$$\mathscr{P}_1 : \ 2x + 3y + 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2 : \ 3x + 4y - z + 5 = 0.$$

On résout le système en utilisant une variable comme paramètre (ici y), et en faisant des combinaisons linéaires des équations pour éliminer une des deux autres variables :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ 3x + 4y - z + 5 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x + 2z = 1 - 3y \\ 3x - z = -5 - 4y \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 8x = -9 - 11y \\ 8z = 13 - y \end{array}\right. \iff \exists t \in \mathbb{R} \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{9}{8} - 11\,t \\ y = 8\,t \\ z = \frac{13}{8} - t \end{array}\right.$$

l'intersection des deux plans est la droite $\mathscr{D}$ passant par le point M_0 de coordonnées $\left(\frac{-9}{8}, 0, \frac{13}{8}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (-11, 8, -1)$.

Nota Bene

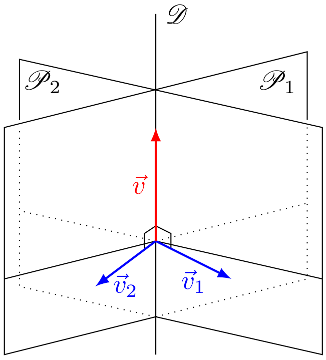
Une droite affine de $\mathbb{R}^3$ est de codimension 2 : elle est définie par deux équations cartésiennes linéairement indépendantes, autrement dit deux « contraintes » dans l'espace de dimension 3.
Ces équations ne sont pas uniques : étant données deux équations définissant une droite, tout autre système d'équations est obtenu par des combinaisons linéaires de ces deux équations (cf. paragraphe 1.3.6).

Remarque 1.3.4

Si on munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel $\langle (x, y, z) \mid (x', y', z')\rangle = xx' + yy' + zz'$, on peut interpréter les vecteurs $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ comme des vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, donc orthogonaux à la droite $\mathscr{D} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$. Il en résulte que

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.



Exercice 1.3.5

1. Soit $\mathscr{D}$ une droite donnée par une représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + \alpha\, t \\ y = y_0 + \beta\, t \\ z = z_0 + \gamma\, t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

   Donner un système d'équations cartésiennes de Δ.

2. Soit une droite $\mathscr{D}$ donnée par deux équations cartésiennes

$$\mathscr{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

   Déterminer la forme générale de l'équation cartésienne d'un plan contenant $\mathscr{D}$.

Exercice 1.3.6

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point et $\mathscr{P}$: $ax + by + cz + d = 0$ un plan de $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle. On note $\mathrm{d}(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$ la distance entre M et N. On appelle distance de M_0 à $\mathscr{P}$ le réel positif

$$\mathrm{d}(M_0, \mathscr{P}) = \inf \left\{ \mathrm{d}(M_0, M) : M \in \mathscr{P} \right\}$$

1. Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par M_0 perpendiculaire à $\mathscr{P}$.
2. En déduire que
$$\mathrm{d}(M_0,\mathscr{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$
3. Soit Δ une droite donnée par une représentation paramétrique
$$\Delta : \left\{\begin{array}{l} x = x_1 + \alpha\, t \\ y = y_1 + \beta\, t \\ z = z_1 + \gamma\, t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$
Donner une équation du plan Π passant par le point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ et perpendiculaire à Δ. En déduire la distance de M_0 à Δ à savoir
$$\mathrm{d}(M_0,\Delta) = \inf\left\{\mathrm{d}(M_0,M) : M\in\Delta\right\}$$

1.3.5 Concours d'un plan et d'une droite de $\mathbb{R}^3$

Cas du plan donné par une équation cartésienne et d'une droite par une rep. param.

Soient un plan $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$ donné par une équation cartésienne et une droite $\mathscr{D}$ donnée une représentation paramétrique
$$\mathscr{P} :\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D} : \left\{\begin{array}{l} x = x_2 + a_2\, t \\ y = y_2 + b_2\, t \\ z = z_2 + c_2\, t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$
Pour trouver les éventuels points d'intersection, on substitue les variables x, y, z dans l'équation du plan par leur valeur en fonction de t de la seconde : soit $M(x_2+a_2t, y_2+b_2t, z_2+c_2t)$ un point de $\mathscr{D}_2$,
$$\big(M\in\mathscr{P}_1\big) \iff \Big((a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)t + a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_1 = 0\Big).$$
On trouve les trois cas suivants :

1. si $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_1 = 0$ alors $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}$;
2. si $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$ et $a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_1 \neq 0$ alors $\mathscr{D}\cap\mathscr{P} = \varnothing$: on dit que $\mathscr{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.
3. si $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \neq 0$, il y a un unique point d'intersection $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants.

Cas d'un plan et d'une droite définis par des équations cartésiennes

Soient un plan $\mathscr{P}_1$ de $\mathbb{R}^3$ et une droite $\mathscr{D}_2$ donnés par des équations cartésiennes
$$\mathscr{P} :\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D} : \left\{\begin{array}{l} a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + d_2' = 0 \end{array}\right.$$
On résout le système formé des trois équations. On retrouve les trois cas.

1. Le quadruplet (a_1,b_1,c_1,d_1) est combinaison linéaire de (a_2,b_2,c_2,d_2) et (a_3,b_3,c_3,d_3), autrement dit le système formé de ces trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est de rang 2 (on rappelle que les deux vecteurs (a_2,b_2,c_2), (a_2',b_2',c_2') forment un système de rang 2 pour définir une droite) : dans ce cas, $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}$.
2. Le système formé de ces trois vecteurs (a_1,b_1,c_1,d_1), (a_2,b_2,c_2,d_2), (a_2',b_2',c_2',d_2') de $\mathbb{R}^4$ est de rang 3, mais le système formé des trois vecteurs (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), (a_2',b_2',c_2') de $\mathbb{R}^3$ est de rang 2. Dans ce cas, $\mathscr{D}\cap\mathscr{P}=\varnothing$, la droite est parallèle au plan.
3. Le système formé des trois vecteurs (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), (a_2',b_2',c_2') de $\mathbb{R}^3$ est de rang 3 : $\mathscr{D}\cap\mathscr{P}$ est réduit à un unique point, la droite est sécante au plan.

1.3.6 Concours de deux droites de $\mathbb{R}^3$

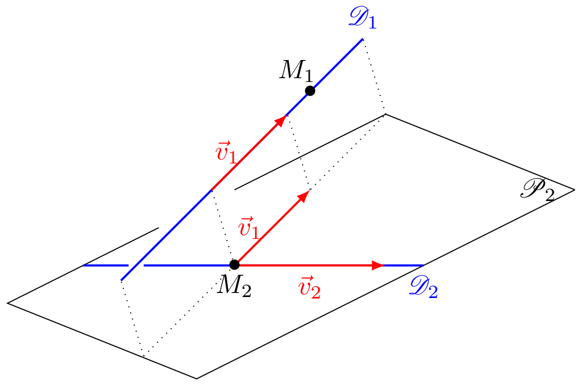
Cas de deux droites données par des représentations paramétriques

Soient deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de $\mathbb{R}^3$ données par des représentations paramétriques

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1\,t \\ y = y_1 + b_1\,t \\ z = z_1 + c_1\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2\,t \\ y = y_2 + b_2\,t \\ z = z_2 + c_2\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On note M_1 le point de $\mathscr{D}_1$ de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et M_2 le point de $\mathscr{D}_2$ de coordonnées (x_2, y_2, z_2), et $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ les vecteurs directeurs. Quatre cas se présentent :

1. les deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires et M_1 appartient à $\mathscr{D}_2$: les deux droites sont confondues.
2. les deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires et M_1 n'appartient pas à $\mathscr{D}_2$: les deux droites sont strictement parallèles, donc sont **coplanaires** dans le plan contenant M_1 et la droite $\mathscr{D}_2$.
3. les deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont linéairement indépendants et M_1 appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par M_2 de direction vectorielle engendrée par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$: les deux droites sont **coplanaires** (dans $\mathscr{P}$) et sécantes dans $\mathscr{P}$.
4. les deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont linéairement indépendants et M_1 n'appartient pas au plan $\mathscr{P}_2$ passant par M_2 de direction vectorielle engendrée par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$: les deux droites **ne sont pas coplanaires** et donc ne s'intersectent pas.



Exercice 1.3.7

Soient deux droites $\mathscr{D}_1$ est $\mathscr{D}_2$ deux droites de l'espace affine euclidien donnée par leurs représentations paramétriques

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1\,t \\ y = y_1 + b_1\,t \\ z = z_1 + c_1\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2\,t \\ y = y_2 + b_2\,t \\ z = z_2 + c_2\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour deux points M et N de l'espace, on note $\mathrm{d}(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$ la distance entre M et N. On appelle distance entre $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ le réel positif

$$\mathrm{d}(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = \inf\left\{\mathrm{d}(M, N) : M \in \mathscr{D}_1,\ N \in \mathscr{D}_2\right\}$$

On suppose que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles (ni confondues).

(a) Trouver une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$ et parallèle à $\mathscr{D}_1$.

(b) Il existe alors une unique droite Δ sécante à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ dont la direction vectorielle $\vec{\Delta}$ est orthogonales aux directions $\vec{\mathscr{D}}_1$ et $\vec{\mathscr{D}}_2$ de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. On dit que Δ est perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Déterminer une représentation paramétrique de cette perpendiculaire commune à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

(c) En déduire que

$$\mathrm{d}(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a_1 & a_2 \\ y_2 - y_1 & b_1 & b_2 \\ z_2 - z_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

(d) Pourquoi doit-on exclure le cas de droites parallèles (au sens large) dans les questions précédentes ?

(e) Déterminer la distance $\mathrm{d}(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)$ lorsque $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles.

Cas de deux droites données par des équations cartésiennes

Soient deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de $\mathbb{R}^3$ données par des équations cartésiennes

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + d'_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a'_2 x + b'_2 y + c'_2 z + d'_2 = 0 \end{cases}$$

où, pour définir des droites, les vecteurs $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v}'_1 = (a'_1, b'_1, c'_1)$ forment un système de rang 2 de $\mathbb{R}^3$, de même que les vecteurs $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ et $\vec{v}'_2 = (a'_2, b'_2, c'_2)$. On résout le système formé des quatre équations.

Exercices 1.3.8

1. Étudier les quatre cas (droites confondues, parallèles, sécantes, non coplanaires) en fonction des coefficients.
   Indication : étudier en fonction des rangs des systèmes de vecteurs

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}'_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_2\} \text{ et } \{(a_1, b_1, c_1, d_1), (a'_1, b'_1, c'_1, d'_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), (a'_2, b'_2, c'_2, d'_2)\}.$$

2. Traiter le cas d'une droite donnée par des équations cartésiennes, et d'une autre par une représentation paramétrique.

1.4 Utilisation la dimension 3 pour résoudre un problème de dimension 2

On considère trois points $A(a, a')$, $B(b, b')$ et $C(c, c')$ dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Étudier l'alignement de ces points est souvent fastidieux surtout si les coordonnées sont données par des formules un peu compliquées (par exemple si les coordonnées sont des fractions d'entiers, ou des fractions dépendant d'un paramètre...) : on commence par former les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (b - a, b' - a')$ et $\overrightarrow{AC} = (c - a, c' - a')$ par exemple, puis on calcule le déterminant

$$\begin{vmatrix} b - a & c - a \\ b' - a' & c' - a' \end{vmatrix} = (b - a)(c' - a') - (c - a)(b' - a').$$

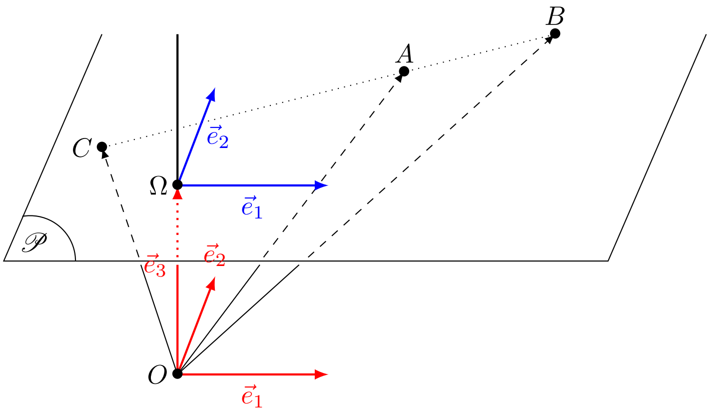
La nullité de ce déterminant équivaut à la colinéarité des vecteurs et donc à l'alignement des points.

Une méthode alternative consiste à identifier le plan $\mathscr{P}$ avec le plan d'équation $z = 1$ de $\mathbb{R}^3$. On se rapporte à un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0) \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \quad \Omega(0, 0, 1), \quad A(a, a', 1), \quad B(b, b', 1), \quad C(c, c', 1)$$

L'alignement des points A, B et C équivaut à la coplanarité des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ c'est à dire à la nullité du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (ab' - a'b) - (ac' - a'c) + (bc' - b'c) = (b-a)(c'-a') - (c-a)(b'-a').$$

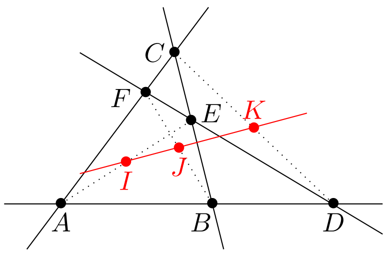


Comme on peut remplacer un vecteur par un de ses multiples, les points de coordonnées rationnelles :

$$A_1\left(\frac{m_1}{p_1}, \frac{n_1}{p_1}\right) \quad A_2\left(\frac{m_2}{p_2}, \frac{n_2}{p_2}\right) \quad A_3\left(\frac{m_3}{p_3}, \frac{n_3}{p_3}\right) \quad \text{sont alignés si et seulement si} \quad \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 1.4.1

On se donne un **quadrilatère complet** à savoir six points d'intersection de quatre droites en position générale (c'est à dire deux à deux sécantes mais jamais trois droites concourantes). On note A, B, C trois des points non alignés et $D \in (AB)$, $E \in (BC)$ et $F \in (AC)$.



Montrer que les points I, J et K milieux respectifs de $[AE]$, $[BF]$ et $[CD]$ sont alignés.

Indication : on pourra considérer le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, dans lequel $D(d, 0)$, $F(0, f)$, donner les équations des droites (BC) et (DF) puis trouver les coordonnées de E.

On termine au moyen des coordonnées de I, J et K en appliquant ce qui précède.

Remarque 1.4.2

On peut généraliser en dimension plus grande : quatre points $A(a, a', a'')$, $B(b, b', b'')$, $C(c, c', c'')$ et $D(d, d', d'')$ de l'espace de dimension 3 sont coplanaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.5 Utilisation des nombres complexes

1.5.1 Le plan complexe

• L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$, isomorphe à $\mathbb{R}^2$ pour les opérations

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (z_1,z_2) & \mapsto & z_1+z_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda,z) & \mapsto & \lambda\cdot z \end{array}$$

Il admet également, comme $\mathbb{R}^2$ une interprétation en tant que plan affine, mais avec en plus une structure euclidienne naturelle.

– **Structure affine.** On représente généralement $\mathbb{C}$ par un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. À un point $M(x,y)$ du plan on associe son affixe $z=x+\mathrm{i}y$. On note $M(z)$: « le point d'affixe z ». De même, on associe au vecteur $\vec{v}=(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$ à son affixe $w=a+\mathrm{i}b$. Ainsi, $\vec{e}_1$ a pour affixe 1 et $\vec{e}_2$ pour affixe i.

– **Structure euclidienne.** Si $w_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ et $w_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ sont les affixes des vecteurs $\vec{v}_1=(x_1,y_1)$ et $\vec{v}_2=(x_2,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{w}_1w_2 &= \mathrm{Re}(\bar{w}_1w_2)+\mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(\bar{w}_1w_2)=(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}\cdot(x_1y_2-x_2y_1) \\ &= \langle\vec{v}_1\mid\vec{v}_2\rangle+\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2). \end{aligned}$$

La partie réelle définit naturellement un **produit scalaire** qui confère à $\mathbb{C}$ une structure euclidienne (dans ce contexte, le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ ci-dessus est orthonormal).

La partie imaginaire donne le **déterminant** des deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. On appelle parfois **produit vectoriel** ce déterminant (noté alors $\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2$ *qui est un nombre dans ce contexte de dimension 2*). Il définit à la fois une notion d'**aire** ($|x_1y_2-x_2y_1|$ étant l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$), et une notion d'**orientation** donnée par le signe du déterminant (positif ou négatif selon que $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ est directe ou non par rapport à $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$).

Ainsi si $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs d'affixes respectives w, w_1 et w_2, et M_1 et M_2 des points d'affixes respectives z_1 et z_2 :

$(w_1,w_2)\mapsto \mathrm{Re}(\bar{w}_1w_2)=\dfrac{1}{2}(\bar{w}_1w_2+w_1\bar{w}_2)$ est le produit scalaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$;

$(w_1,w_2)\mapsto \mathrm{Im}(\bar{w}_1w_2)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\bar{w}_1w_2-w_1\bar{w}_2)$ est le déterminant (produit vectoriel) de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$;

$w\mapsto|w|$ est la norme (euclidienne) de $\vec{v}$;

$(z_1,z_2)\mapsto|z_2-z_1|$ est la distance (euclidienne) entre M_1 et M_2 notée $\mathrm{d}(M_1,M_2)$ ou M_1M_2.

• **Écriture complexe d'une équation cartésienne d'une droite**. Soit Δ une droite passant par $M_0(z_0)$ de vecteur normal d'affixe $w=a+\mathrm{i}b$ et soit un point $M(z)$ du plan complexe. On a :

$$(M\in\Delta)\iff\Big(\mathrm{Re}\left(\bar{w}(z-z_0)\right)=0\Big)\iff\big(\bar{w}(z-z_0)+w(\bar{z}-\bar{z}_0)=0\big)$$

> ***Nota Bene***
>
> Toute droite du plan complexe a une équation (cartésienne complexe) de la forme
>
> $$\bar{w}z+w\bar{z}=c \quad \text{où} \quad w=a+\mathrm{i}b\neq 0 \quad \text{et} \quad c\in\mathbb{R}.$$
>
> $w=a+\mathrm{i}b$ est l'affixe d'un vecteur normal, $\mathrm{i}w=-b+\mathrm{i}a$ l'affixe d'un vecteur directeur.

• **Alignement et mesure algébrique**. Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts du plan. Pour un point $M(z)$ du plan, on a l'équivalence :

$$\Big(M \in (AB)\Big) \iff \left(\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}\right)$$

Pour deux points $M(z)$ et $N(w)$ de la droite (AB), le réel $\overline{MN} = \dfrac{w-z}{b-a} = \dfrac{w-a}{b-a} - \dfrac{z-a}{b-a}$ est la mesure algébrique sur (AB) associée au vecteur directeur $\vec{AB}$.

1.5.2 Cercle et écriture trigonométrique

• Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(w)$ et de rayon $r \geq 0$ ($r > 0$ en général), souvent noté $\mathscr{C} = \mathcal{C}(\Omega, r)$ est l'ensemble des points à distance r de Ω :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} : \Omega M = r\}.$$

Soit M un point du plan d'affixe z. On a :

$$(M \in \mathscr{C}) \iff (|z-w|^2 = r^2) \iff (\bar{z}z - \bar{w}z - w\bar{z} + \bar{w}w - r^2 = 0).$$

Autrement dit, un cercle a pour équation cartésienne

$$\bar{z}z - \bar{w}z - w\bar{z} = c \qquad w \in \mathbb{C} \quad c \in \mathbb{R},\ c + |w|^2 \geq 0.$$

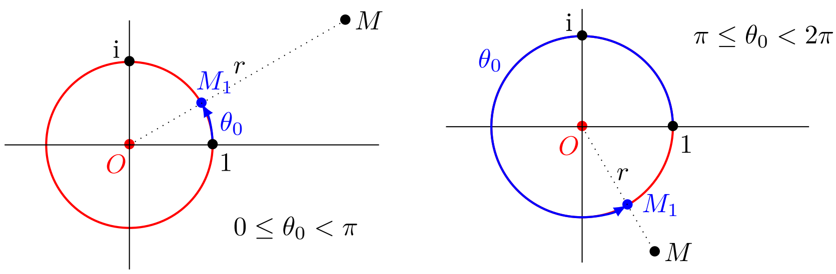
Remarque 1.5.1

Une équation du type $\alpha\bar{z}z + \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + \beta = 0$ où $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et $|\omega|^2 - \alpha\beta \geq 0$ est l'équation d'un cercle si $\alpha \neq 0$ et l'équation d'une droite si $\alpha = 0$ et $\omega \neq 0$. Ce type d'équation unifie dans une même famille les droites et cercles du plan complexe. Cette remarque est importante dans le cadre de l'étude des homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ qui interviennent en géométrie projective complexe de dimension 1 (sur la sphère de Riemann) et plus généralement pour l'étude des fonctions dites holomorphes (c'est à dire grosso modo des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes qui sont dérivables au sens complexe du terme).

• **Arguments d'un nombre complexe**. Tout point $M(z)$ du plan complexe privé de l'origine $O(0)$ est situé sur le cercle de centre $O(0)$ et de rayon $r = |z| > 0$. On peut lui associer le point M_1, d'affixe $\frac{z}{|z|}$ sur le cercle de rayon 1 et on peut écrire

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Le nombre θ, appelé **(un) argument** de z et noté $\arg(z)$ est une **mesure d'angle en radian**. Il n'est défini qu'à un multiple de 2π près (1 tour $= 2\pi$ radian). La **détermination principale** de cette mesure, $\theta = \theta_0 \in [0; 2\pi[$, est la **longueur de l'arc du cercle unité** joignant le point d'affixe 1 au point M_1 d'affixe $\frac{z}{|z|}$, orienté dans le sens trigonométrique. Toute autre valeur $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ convient également si on s'autorise à faire en plus k tours dans le sens trigonométrique si $k \geq 0$, ou $-k$ tours dans le sens inverse du sens trigonométrique si $k < 0$. On écrit $\theta \equiv \theta_0\ [2\pi]$ (ou $\theta = \theta_0\ [2\pi]$) la relation d'équivalence modulo 2π (c'est à dire $\theta - \theta_0$ est un multiple de 2π).



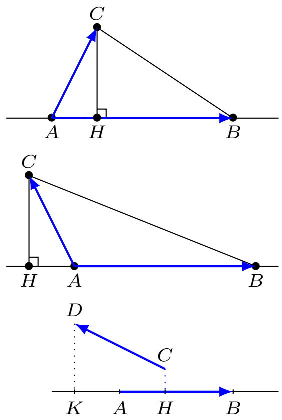
Propriétés : $\quad \arg(zz') = \arg z + \arg z'\ [2\pi] \qquad \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z\ [2\pi].$

1.5.3 Quelques notions géométriques de base (cadre euclidien)

- **Interprétation géométrique du produit scalaire**.

Puisqu'on dispose d'une distance, on a des **mesures algébriques privilégiées** sur chaque droite : on choisit $\overline{AB}$ de sorte que $AB = |\overline{AB}|$ pour tous points A, B. Le produit scalaire peut être vu comme « défaut du théorème de Pythagore » pour un triangle non rectangle.
Soit ABC un triangle et H le projeté de C sur (AB). Alors

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 - BC^2 &= AB^2 + (AH^2 + HC^2) - (HC^2 + BH^2) \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 - \overline{BH}^2 \\ &= \overline{AB}^2 + (\overline{AH} - \overline{BH})(\overline{AH} + \overline{BH}) \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AB} \times (\overline{AH} + \overline{BH}) \\ &= \overline{AB} \times (\overline{AB} + \overline{AH} + \overline{BH}) \\ &= 2\overline{AB} \times \overline{AH} = 2\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \rangle \end{aligned}$$



Plus généralement, si H et K sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB), alors

$$\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \rangle = \overline{AB} \times \overline{HK}.$$

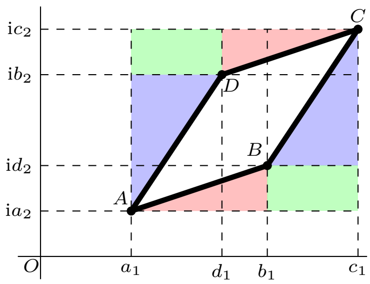
Dans le cas du plan complexe, si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $H(h)$ et $K(k)$ cette relation donne :

$$\mathrm{Re}\left((\bar{b} - \bar{a})(d - c)\right) = (k - h)(\bar{b} - \bar{a}) \in \mathbb{R}.$$

- **Interprétation géométrique du déterminant (produit vectoriel)**.

On considère quatre points $A(a)$, $B(b)$ $C(c)$ et $D(d)$ formant un parallélogramme c'est à dire $b - a = c - d$. L'aire du parallélogramme $ABCD$ est donnée par :

$$|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})| = |\,\mathrm{Im}((\bar{b} - \bar{a})(d - a)|$$

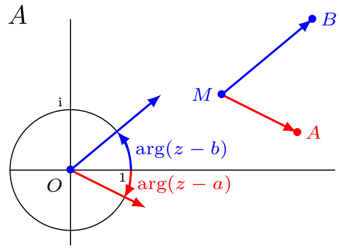


De plus le signe de ce déterminant indique si le couple de vecteurs est est orienté dans le sens direct (déterminant positif comme sur le dessin pour le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$) ou indirect (déterminant négatif comme sur le dessin pour le couple $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$).
Sur le dessin ci-contre : $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$, $c = c_1 + \mathrm{i}c_2$ et $d = d_1 + \mathrm{i}d_2$.

- **Mesure d'un angle défini par trois points**.

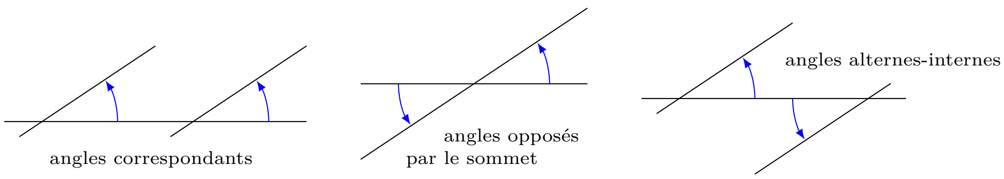
Soient trois points du plan $A(a)$, $B(b)$ et $M(z)$ tels que M est distinct de A et B. La mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est :

$$\theta = \mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{b - z}{a - z}\right) = \arg(b - z) - \arg(a - z) \ [2\pi]$$



et on a $\begin{cases} \langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \rangle = MA \times MB \times \cos\theta = |b - z||a - z|\cos\theta \\ \det(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = MA \times MB \times \sin\theta = |b - z||a - z|\sin\theta \end{cases}$

Cas d'égalité des angles :



Nota Bene

On parle d'**angle géométrique** quand on identifie un angle et son opposé. Sa mesure en radian est un nombre entre 0 et π. **L'orientation de l'angle n'a pas d'incidence sur le cosinus, en revanche le changement d'orientation change le signe du sinus.**

Proposition 1.5.2: Propriétés du produit scalaire

Soit E un espace vectoriel euclidien, on note $(\vec{u};\vec{v}) \mapsto \langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle$ le produit scalaire. On a les propriétés suivantes :

1. *Identités remarquables.*
   (a) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle + \vec{v}^{\,2}$ *(ou encore* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$*) ;*
   (b) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle + \vec{v}^{\,2}$ *(ou encore* $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$*) ;*
   (c) $\langle \vec{u}+\vec{v} \mid \vec{u}-\vec{v}\rangle = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$ *(ou encore* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$*).*
2. *Formule du parallélogramme (ou de la médiane)*
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$
3. *Produit scalaire en fonction de la norme (identités de polarisation)*
$$\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle = \frac{1}{4}\big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\big) = \frac{1}{2}\big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\big) = \frac{1}{2}\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\big).$$
4. *Théorème de Pythagore*
$$\big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\big) \iff \big(\vec{u} \perp \vec{v}\big).$$
5. *Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire*
$$|\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \qquad \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$
   En particulier, $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|$ est une norme.

Ces propriétés s'interprètent géométriquement de façon suivante (en exercice).

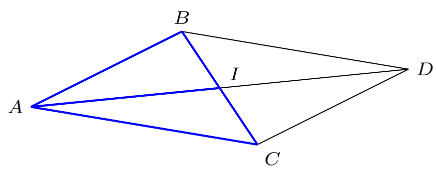
• **Formules du parallélogramme et de la médiane**. Soit $ABDC$ un parallélogramme, I son centre (l'intersection des diagonales). On rappelle que le point I est le milieu commun de $[AD]$ et $[BC]$

En effet si A, B, C, D ont pour affixes a, b, c, d les milieux de $[AD]$ et $[BC]$ ont pour affixes $\frac{a+d}{2}$ et $\frac{c+d}{2}$ et

$$(b-a=d-c) \iff (b-d=a-c) \iff \Big(\frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{2}(a+d)\Big).$$

En faisant des combinaisons des formules (a), (b) et (c) de la proposition ci-dessus, on obtient les formules suivantes :

— **Formule du parallélogramme** : la somme des carrés des longueurs des diagonales égale la somme des carrés des longueurs des côtés
$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2.$$
Autrement dit, si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, alors :
$$|d-a|^2 + |b-c|^2 = 2\Big(|b-a|^2 + |c-a|^2\Big).$$



— De façon équivalente, on a la **première formule de la médiane** : dans le triangle ABC le point I est le milieu de $[BC]$, la longueur de la médiane $[IA]$ issue de A satisfait

$$IA^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{2}\Big(|b-a|^2 + |c-a|^2\Big) - \frac{1}{4}|b-c|^2.$$

— **Deuxième formule de la médiane** :

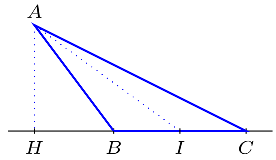
$$IA^2 = \langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \rangle + \frac{1}{4}BC^2 = \mathrm{Re}\Big((\bar{b}-\bar{a})(c-a)\Big) + \frac{1}{4}|b-c|^2$$

— **Troisième formule de la médiane**. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

$$2\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{IA} \rangle = 2\overline{BC} \times \overline{IH} = AB^2 - AC^2$$

ou encore, si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $H(h)$

$$\mathrm{Re}\Big((\bar{c}-\bar{b})(b+c-2a)\Big) = (\bar{c}-\bar{b})(b+c-2h) = |b-a|^2 - |c-a|^2.$$



• **Inégalité triangulaire** : (inégalité de Cauchy-Schwarz) dans un triangle ABC, la longueur d'un côté est plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés.

$$|AB - BC| \leq AC \leq AB + BC \qquad \Big(\Big| \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{BC}\| \Big| \leq \|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| \Big).$$

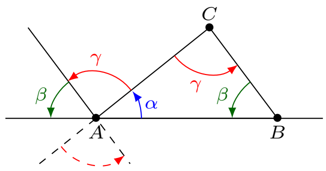
En particulier, dans le plan, pour que trois réels positifs p, q, r soient les longueurs des côtés d'un triangle, il faut et il suffit que $|p-q| \leq r \leq p+q$.

• **Somme des angles d'un triangle** : dans un triangle ABC, la somme des mesures des angles (aux sommets) orientés est égale à π modulo 2π.

$$\mathrm{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi \ [2\pi].$$

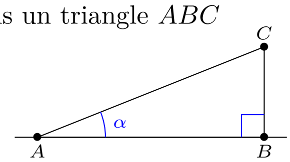
autrement dit si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$:

$$\frac{c-a}{b-a} \times \frac{a-b}{c-b} \times \frac{b-c}{a-c} = -1$$



• **Formules trigonométriques dans un triangle rectangle**. Dans un triangle ABC rectangle en B, si α est la mesure de l'angle géométrique en A alors

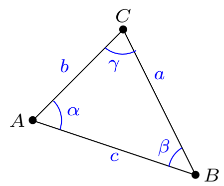
$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \qquad \sin\alpha = \frac{BC}{AC} \qquad \tan\alpha = \frac{BC}{AB}.$$



Dans un triangle ABC, on note α, β, γ les mesures d'angle géométrique aux points A, B et C respectivement et $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ les longueurs de côtés.

• **Loi du cosinus (formule d'Al-Khashi)**.
La relation d'Al-Khashi suivante s'obtient en développant le carré scalaire de $\overrightarrow{BC}$ puis en exprimant le produit scalaire en fonction du cosinus de l'angle géométrique :

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$



• **Loi des sinus**.
Notons S l'aire du triangle. En prenant cette fois le déterminant (produit vectoriel) on obtient la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S}$$

• **Formule de Héron**.
En mélangeant les lois des sinus et des cosinus on obtient la formule de Héron suivante, qui permet d'exprimer l'aire d'un triangle uniquement au moyen des longueurs des côtés :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où } p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ est le demi-périmètre}$$

et on en déduit l'inégalité isopérimétrique dans le triangle donnant une majoration de l'aire pour un périmètre donné (le cas d'égalité est obtenu si et seulement si le triangle est équilatéral de côté $a = \frac{2}{3}p$) :

$$S \leq \frac{p}{3\sqrt{3}}$$

• **Triangle isocèle et médiatrice**. Soient trois points du plan $A(a)$, $B(b)$ et $\Omega(\omega)$, A et B distincts. Le triangle $A\Omega B$ est isocèle en Ω si $\Omega A = |a-\omega| = |b-\omega| = \Omega B$, autrement dit A et B sont situés sur un même cercle centré en Ω.

Proposition 1.5.3: Propriétés angulaires d'un triangle isocèle

Soient trois points distincts du plan $A(a)$, $B(b)$ et $\Omega(\omega)$. Le triangle $A\Omega B$ est isocèle en Ω si et seulement si il satisfait une des propriétés équivalentes suivantes :

1. *Ω est sur la **médiatrice** du segment $[AB]$, c'est à dire la droite passant par le milieu I du segment $[AB]$ et perpendiculaire à (AB) autrement dit*

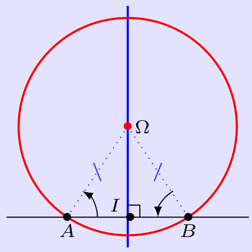
$$\operatorname{Re}\left[\left(\omega - \frac{a+b}{2}\right)\left(\bar{b} - \bar{a}\right)\right] = 0 \quad \textit{ou encore} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\omega - \frac{a+b}{2}}{b-a}\right) = 0.$$

2. *il existe des mesures des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega})$ et $(\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BA})$ telle que*

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BA}) < \frac{\pi}{2}$$

$$\textit{ou bien} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{\omega - a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{a-b}{\omega - b}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\textit{ou encore} \quad \frac{\omega - a}{b-a} \times \frac{\omega - b}{a-b} \textit{ est un réel supérieur strictement à } \frac{1}{4}.$$



<u>*Démonstration.*</u> *Notons $c = \frac{a+b}{2}$ l'affixe de I, milieu de $[AB]$.*

1. *Utilisons la troisième formule de la médiane : $2\langle \overrightarrow{I\Omega} \mid \overrightarrow{AB} \rangle = \Omega A - \Omega B$ autrement dit*

$$2\operatorname{Re}\left[(\omega - c)(\bar{b} - \bar{a})\right] = 2|b-a|^2 \operatorname{Re}\left[\frac{\omega - c}{b-a}\right] = |\omega - a|^2 - |\omega - b|^2.$$

Alors $\big(|\omega - a| = |\omega - b|\big) \iff \big(\langle \overrightarrow{I\Omega} \mid \overrightarrow{AB} \rangle = 0\big)$ *ce qui prouve la partie 1.*

2. *On a : $c - a = \frac{b-a}{2}$ et $c - b = \frac{a-b}{2}$ donc*

$$\frac{\omega - a}{b-a} \times \frac{\omega - b}{a-b} = \left(\frac{\omega - c}{b-a} + \frac{c-a}{b-a}\right)\left(-\frac{\omega - c}{b-a} + \frac{c-b}{a-b}\right) = \frac{1}{4} - \left(\frac{\omega - c}{b-a}\right)^2.$$

Cette quantité est réelle supérieure strictement à $\frac{1}{4}$ si et seulement si $\frac{\omega - c}{b-a} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}^*$ c'est à dire

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\omega - c}{b-a}\right) = \frac{1}{|b-a|^2} \operatorname{Re}\left((\omega - c)(\bar{b} - \bar{a})\right) = 0 \qquad (c \neq \omega)$$

ce qui équivaut au caractère isocèle de $A\Omega B$ en Ω d'après (1).

□

- **Cercle circonscrit à un triangle** ABC. Soient $A(a)$, $B(a)$ et $C(c)$ trois points non alignés. Il existe un unique cercle passant par ces trois points : c'est le **cercle circonscrit** au triangle ABC ; **son centre** Ω **est le point d'intersection des trois médiatrices**, nécessairement concourantes, des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ et son rayon le réel $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ (conséquence de la proposition 1.5.3.)

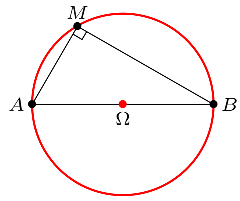
Exercice 1.5.4

Montrer que la loi des sinus donne le rayon du cercle circonscrit :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

- **Cercle de diamètre le segment** $[AB]$. Soient $A(a)$ et $B(a)$ deux points distincts. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ a pour centre $\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et rayon $r = \frac{|b-a|}{2}$. C'est l'ensemble des points M satisfaisant

$$\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \rangle = 0.$$



En effet, cette relation se traduit par $\operatorname{Re}\left((\bar z - \bar a)(z-b)\right) = 0$ c'est à dire

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Big((\bar z - \bar a)(z-b)\Big) &= \bar z z - \frac{\bar a + \bar b}{2} z - \frac{a+b}{2}\bar z + \frac{\bar a b + a\bar b}{2}\\ &= \bar z z - \frac{\bar a + \bar b}{2} z - \frac{a+b}{2}\bar z + \frac{|a+b|^2}{4} - \frac{|a-b|^2}{4} = 0.\end{aligned}$$

On reconnaît là l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et rayon $r = \frac{|b-a|}{2}$.

- **Théorème de l'angle inscrit et cocyclicité.**

Lemme 1.5.5: Angle au centre

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r, et soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts de $\mathscr{C}$. Si un point $M(z)$ du plan appartient au cercle $\mathscr{C}$ alors :

$$2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \ [2\pi] \quad \text{ou encore} \quad 2\arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) = \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \ [2\pi].$$

Démonstration. *On utilise la proposition 1.5.3. Si M est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω passant par A et B, les deux triangles $MA\Omega$ et $BM\Omega$ sont tous deux isocèles en Ω.*

1. ***En utilisant les mesures d'angle.*** *On considère les sommes des mesures d'angles orientés des deux triangles $MA\Omega$ et $BM\Omega$:*

$$\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) = 2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) = \pi \ [2\pi]$$

$$\mathrm{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B\Omega}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) = \pi \ [2\pi]$$

En faisant la somme il vient :

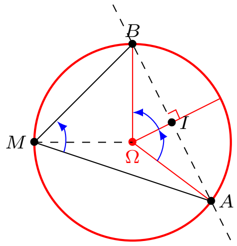
$$2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + 2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) + \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) = 0 \ [2\pi]$$

D'où

$$2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \ [2\pi]$$

2. ***En utilisant les affixes.*** *On suppose $A(a)$, $B(b)$, $\Omega(w)$ et $M(z)$. On a :*

$$\frac{b-\omega}{a-\omega} = \frac{b-\omega}{b-z} \times \frac{b-z}{a-z} \times \frac{a-z}{a-\omega} = \frac{\omega-b}{z-b} \times \frac{b-z}{a-z} \times \frac{z-a}{\omega-a}.$$



En passant à l'argument, il vient :

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) = \arg\left(\frac{\omega-b}{z-b}\right) + \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) + \arg\left(\frac{z-a}{\omega-a}\right) \quad [2\pi]$$

Comme les triangles $MA\Omega$ et $BM\Omega$ sont isocèles en Ω, il vient :

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) = \arg\left(\frac{b-z}{\omega-z}\right) + \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) + \arg\left(\frac{\omega-z}{a-z}\right) = 2\arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) \quad [2\pi].$$

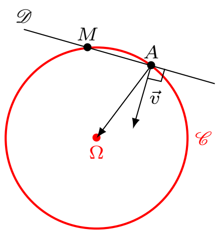
□

Proposition 1.5.6: Tangente à un cercle

1. *Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, et $A(a)$ un point de $\mathscr{C}$. Il existe une unique droite passant par A qui n'intersecte $\mathscr{C}$ qu'au point A : cette droite est la perpendiculaire en A à la droite $(A\Omega)$. On l'appelle la* ***tangente*** *à $\mathscr{C}$ en A.*
2. *Deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui ont une tangente commune $\mathcal{T}$ en un point A sont confondus ou bien ne s'intersectent qu'au point A. Dans ce cas, ils sont sont dits* ***tangents*** *en A.*

Démonstration.

1. *Le cercle de centre Ω de rayon $r = \Omega A$ et une droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur normal unitaire $\vec{v}$ d'affixe α (avec $|\alpha| = 1$) ont des équations de la forme*



$$\mathscr{C} : (\bar{z}-\bar{a})(z-a) - (\bar{\omega}-\bar{a})(z-a) - (\omega-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 0$$
$$\mathscr{D} : \bar{\alpha}(z-a) + \alpha(\bar{z}-\bar{a}) = 0 \quad \text{ou encore} \quad (\bar{z}-\bar{a}) = -\bar{\alpha}^2(z-a).$$

Ainsi un point $M(z)$ appartient à $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ si et seulement si

$$\big[(z-a) + \alpha\big(\alpha(\bar{\omega}-\bar{a}) - \bar{\alpha}(\omega-a)\big)\big](z-a) = 0$$

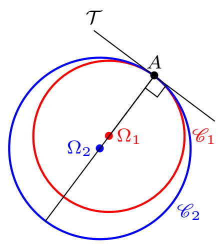
Pour que A soit l'unique point d'intersection, il faut et il suffit que

$$\alpha(\bar{\omega}-\bar{a}) - \bar{\alpha}(\omega-a) = \operatorname{Im}\big(\bar{\alpha}(\omega-a)\big) = 0$$

ce qui traduit le fait que $\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{A\Omega}$ et donc que $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à $(A\Omega)$.

2. *Soient $\Omega_1(\omega_1)$ et $\Omega_2(\omega_2)$ les centres respectifs de deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ayant une même tangente $\mathcal{T}$ en un point A. D'après 1, les points Ω_1, Ω_2 et A sont alignés sur la perpendiculaire à $\mathcal{T}$ en A. Un point M appartient à $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ si son affixe z satisfait les deux équations*

$$\mathscr{C}_1 : (\bar{z}-\bar{a})(z-a) - (\bar{\omega}_1-\bar{a})(z-a) - (\omega_1-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 0$$
$$\mathscr{C}_2 : (\bar{z}-\bar{a})(z-a) - (\bar{\omega}_2-\bar{a})(z-a) - (\omega_2-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 0$$



En faisant la différence entre ces équations on obtient

$$(\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1)(z-a) + (\omega_2-\omega_1)(\bar{z}-\bar{a}) = 2\operatorname{Re}\big((\bar{\omega}_2-\bar{\omega}_1)(z-a)\big) = 0$$

autrement dit soit $\omega_1 = \omega_2$ auquel cas $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont confondus soit $z-a$ est orthogonal $\omega_1-\omega_2$ ce qui signifie que $M \in \mathcal{T}$ donc que $M = A$.

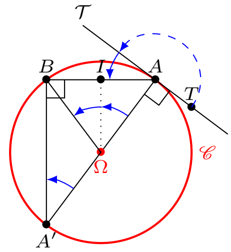
□

Lemme 1.5.7: Angle de la tangente

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r, et soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts de $\mathscr{C}$. Soit $\mathcal{T}$ la droite tangente au cercle en A. Un point $T(t)$ du plan distinct de A appartient à $\mathcal{T}$ si et seulement si :

$$2\,\text{mes}(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})\ [2\pi] \quad \text{ou bien} \quad 2\arg\left(\frac{b-a}{t-a}\right) = \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\ [2\pi]$$

<ins>Démonstration.</ins> *Soit A' le point diamétralement opposé à A.*



1. ***En utilisant les angles.***

   D'après le lemme de l'angle au centre :

   $$2\,\text{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})\ [2\pi]$$

   Or l'angle $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})$ est droit puisque $[AA']$ est un diamètre. Ainsi :

   $$\begin{aligned}\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2\,\text{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) &= 2\,\text{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{TA}) + 2\,\text{mes}(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{BA}) + 2\,\text{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{A'B})\ [2\pi]\\ &= 2\,\text{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{TA}) + 2\,\text{mes}(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{BA}) \pm \pi\ [2\pi]\end{aligned}$$

   Or $T \in \mathcal{T} \setminus \{A\}$ si et seulement si $\text{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{TA}) = \pm\frac{\pi}{2}$ donc si et seulement si

   $$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2\,\text{mes}(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi].$$

2. ***Avec l'écriture complexe.*** *On applique le théorème de l'angle au centre à $A(a)$, $B(b)$, $\Omega(\omega)$, $A'(a')$ et $T(t)$:*

   $$2\arg\left(\frac{b-a'}{a-a'}\right) = \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\ [2\pi].$$

   Comme $[AA']$ est un diamètre, le triangle ABA' est rectangle en B : $\arg\left(\frac{a'-b}{a-b}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
   Ainsi :

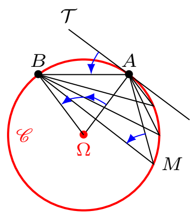
   $$\begin{aligned}\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) = 2\arg\left(\frac{b-a'}{a-a'}\right) &= 2\arg\left(\frac{b-a'}{b-a} \times \frac{b-a}{t-a} \times \frac{t-a}{a-a'}\right)\\ &= 2\arg\left(\frac{b-a}{t-a}\right) + 2\arg\left(\frac{t-a}{a-a'}\right)\ [2\pi]\end{aligned}$$

   donc $T(t)$ appartient à la droite $\mathcal{T} \setminus \{A\}$ si et seulement si $\arg\left(\frac{t-a}{a-a'}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ *c'est à dire*

   $$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) = 2\arg\left(\frac{b-a}{t-a}\right)\ [2\pi].$$

□

Remarque 1.5.8



La condition nécessaire dans le lemme précédent (c'est à dire, si le point est situé sur la tangente alors on a la propriété angulaire) est **un cas limite du théorème de l'angle au centre** lorsqu'on fait tendre le point M vers le point A : la droite (MA) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$, la droite (MB) de la droite (AB).

Corollaire 1.5.9: Théorème de l'angle inscrit, cocylicité

1. ***Théorème de l'angle inscrit***. *Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r, et soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts de $\mathscr{C}$. Si $C(c)$ et $D(d)$ sont deux points de $\mathscr{C} \setminus \{A, B\}$ alors :*

$$\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \ [\pi] \quad \textit{ou bien} \quad \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right) \ [\pi]$$

ou encore $\dfrac{b-c}{a-c} \Big/ \dfrac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$ *(cette dernière quantité s'appelle le **birapport**).*

2. ***Cocylicité***. *Réciproquement, soient quatre points distincts $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ du plan. Si l'une des relation équivalentes de (1) est satisfaite, alors ces quatre points sont cocycliques (appartiennent à un même cercle) ou sont alignés.*

Démonstration.

1. *Cette première partie est une conséquence immédiate du lemme de l'angle au centre.*
2. *Pour la réciproque : supposons que $\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \ [\pi]$*
   - *Si A, B, C sont alignés, alors $\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}^*$ donc si $\frac{b-c}{a-c} \Big/ \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$ il s'ensuit que $\frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$ et donc que $D \in (AB)$; les quatre points sont alignés.*
   - *Si A, B, D sont alignés, le même raisonnement s'applique donc $C \in (AB)$; les quatre points sont alignés.*
   - *Sinon, soient $\mathscr{C}_C$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $\mathscr{C}_D$ le cercle circonscrit au triangle ABD. Notons Ω_C et Ω_D leurs centres respectifs. D'après le lemme de l'angle au centre*

$$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega_C A}, \overrightarrow{\Omega_C B}) = 2\,\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2\,\text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_D A}, \overrightarrow{\Omega_D B}) \ [2\pi]$$

Aussi, d'après le lemme lemme de l'angle de la tangente, ces deux cercles ont la même tangente $\mathcal{T}$ en A, formée du point A et des points $T \neq A$ tels que

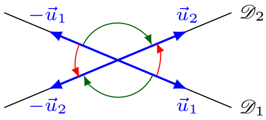
$$2\,\text{mes}(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{AB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_C A}, \overrightarrow{\Omega_C B}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_D A}, \overrightarrow{\Omega_D B}) \ [2\pi]$$

En vertu de la proposition 1.5.6, les deux cercles ayant une tangente et deux points distincts en commun, ils sont nécessairement confondus, et donc A, B, C, D sont cocycliques. □

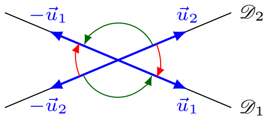
Remarques 1.5.10

Faisons un petit point sur la notion d'angle. Une vraie définition est prématurée et sera donnée plus tard. Cependant, si on s'intéresse à la mesure d'un angle, on peut remarquer les faits suivants :

1. **Angle de demi-droites**. Un angle de vecteurs est aussi appelé angle de demi-droites. On note :
$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = ([AB); [AC)).$$
2. **Angle de droites**. On définit une **mesure d'angle entre deux droites** comme étant **la réduction modulo** π de la mesure de l'angle entre deux vecteurs directeurs. En effet si $\vec{u}_1$ est vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ et $\vec{u}_2$ vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$, les mesures des deux angles de vecteurs $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ et $(\vec{u}_1; -\vec{u}_2)$ diffèrent de π modulo 2π :
$$\text{mes}(\vec{u}_1; -\vec{u}_2) = \text{mes}(\vec{u}_1; \vec{u}_2) + \pi \ [2\pi].$$
On note :
$$\text{mes}(\mathscr{D}_1; \mathscr{D}_2) = \text{mes}(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \text{mes}(\vec{u}_1; -\vec{u}_2) \ [\pi].$$
Attention : les angles restent orientés !



angle $(\mathscr{D}_1;\mathscr{D}_2)$



angle $(\mathscr{D}_2;\mathscr{D}_1)$

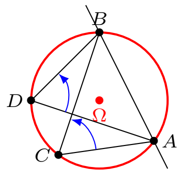
3. **Le théorème de l'angle inscrit est plutôt un théorème d'angles de droites**. Si C et D sont deux points d'un même cercle passant par A et B (distincts) alors

$$\operatorname{mes}\big((CA);(CB)\big) = \operatorname{mes}\big((DA);(DB)\big)\ [\pi].$$

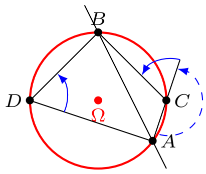
4. **Arc capable**. Si on veut raffiner le théorème de l'angle inscrit, on distingue deux cas :

$$(1)\ \operatorname{mes}(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})\ [2\pi] \qquad (2)\ \operatorname{mes}(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}) + \pi\ [2\pi]$$

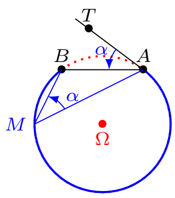
Le premier s'obtient si C et D sont sur le même arc d'extrémités A et B c'est à dire dans le même demi-plan de frontière (AB), le second cas si C et D sont de part et d'autre de (AB).



cas (1)



cas (2)



arc capable

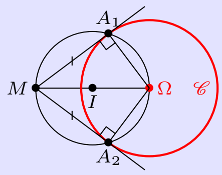
Étant donnée un angle $(\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB})$ de mesure d'angle α modulo 2π, on appelle **arc capable** l'ensemble des points M du plan tels que $\operatorname{mes}(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \alpha\ [2\pi]$ (cf. lemme de la tangente).

- **Bissectrices, cercle inscrit**.

Lemme 1.5.11: Tangentes communes à un cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon r et M un point du plan extérieur au cercle (c'est à dire $\Omega M > r$). Il existe exactement deux droites tangentes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ tangentes à $\mathscr{C}$ et passant par M. De plus, si A_1 et A_2 sont les points de tangence respectifs de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ avec $\mathscr{C}$:

1. *les triangles $\Omega A_1 M$, et $\Omega A_2 M$ sont rectangles en A_1 et A_2 ;*
2. *(ΩM) est la médiatrice de $[A_1A_2]$;*
3. *les points Ω, A_1, M, A_2 sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[\Omega M]$;*
4. *on a égalité des mesures d'angles : $\operatorname{mes}(\overrightarrow{MA_1};\overrightarrow{M\Omega}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{M\Omega};\overrightarrow{MA_2})\ [2\pi]$.*



<u>Démonstration.</u> *Tout découle du fait que la tangente $\mathscr{D}$ en un point A à un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω est perpendiculaire à la droite (ΩA).* □

Définition 1.5.12: Bissectrices

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites sécantes en Ω de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ***unitaires*** *(c'est à dire de norme 1). On considère les droites :*

Δ_+ passant par Ω et dirigée par le vecteur $\vec{v}_+ = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$;

Δ_- passant par Ω et dirigée par le vecteur $\vec{v}_- = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

Ces deux droites Δ_+ et Δ_- sont les deux ***bissectrices*** *de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.*

Proposition 1.5.13: Propriétés des bissectrices

Avec les notations ci-dessus :

1. *Les deux bissectrices Δ_+ et Δ_- sont orthogonales ;*
2. *Un point M appartient à $\Delta_+ \cup \Delta_-$ si et seulement si les distances $\mathrm{d}(M, \mathscr{D}_1)$ et $\mathrm{d}(M, \mathscr{D}_2)$ de M à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont égales.*
3. *$\Delta_+ \cup \Delta_-$ est le lieu des centres des cercles tangents simultanément aux deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.*

Démonstration.

1. *L'orthogonalité est évidente : $\langle \vec{v}_+ \mid \vec{v}_- \rangle = \vec{u}_1^2 - \vec{u}_2^2 = 1 - 1 = 0$.*
2. *Soit M un point du plan (distinct de Ω, ce cas étant évident) et M_1 et M_2 ses projetés orthogonaux sur $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ respectivement. On a $MM_1 = \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_1)$ et $MM_2 = \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_2)$. Munissons $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de mesure algébriques associée à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. On a donc :*

$$\overrightarrow{\Omega M_1} = \overline{\Omega M_1} \cdot \vec{u}_1 \quad \overrightarrow{\Omega M_2} = \overline{\Omega M_2} \cdot \vec{u}_2.$$

   (a) *Supposons que $MM_1 = MM_2$ et considérons le cercle $\mathscr{C}$ de centre M de rayon $r = MM_1 = MM_2$. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont les tangentes au cercle $\mathscr{C}$ et passent par Ω, donc (ΩM) est la médiatrice de $[M_1 M_2]$ autrement dit :*

$$|\overline{\Omega M_1}| = |\overline{\Omega M_2}| = \Omega M_1 = \Omega M_2 \text{ et } (\Omega M) \perp (M_1 M_2)$$

   Autrement dit $\overline{\Omega M_1} = \varepsilon \overline{\Omega M_2}$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Mais alors

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{\Omega M_2} - \overrightarrow{\Omega M_1} = \overline{\Omega M_2} \cdot (\vec{u}_2 - \varepsilon \vec{u}_1)$$

   donc ou bien $\overrightarrow{M_1 M_2}$ est un multiple de $\vec{v}_-$ (si $\varepsilon = 1$) auquel cas $M \in \Delta_+$, ou bien $\overrightarrow{M_1 M_2}$ est un multiple de $\vec{v}_+$ (si $\varepsilon = -1$) auquel cas $M \in \Delta_-$.

   (b) *Supposons réciproquement que $M \in \Delta_+$ (on raisonne de façon analogue si $M \in \Delta_-$). Alors :*

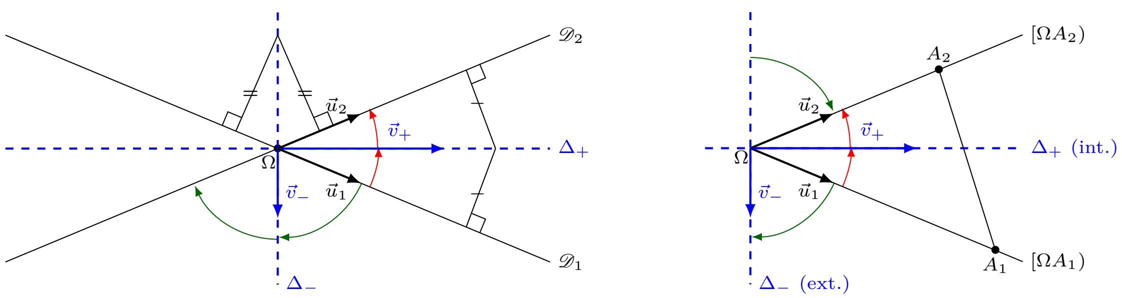
$$\langle \overrightarrow{\Omega M} \mid \vec{v}_- \rangle = 0 = \langle \overrightarrow{\Omega M} \mid \vec{u}_1 \rangle - \langle \overrightarrow{\Omega M} \mid \vec{u}_2 \rangle = \overline{\Omega M_1} - \overline{\Omega M_2}$$

   et donc $\Omega M_1 = \Omega M_2$. Comme les triangle $\Omega M M_1$ et $\Omega M M_2$ sont rectangles respectivement en M_1 et M_2 on a bien en vertu du théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{D}_1) = MM_1 = MM_2 = \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_2).$$

3. *Ce troisième point est une application directe du lemme 1.5.11 et du point précédent.*

□



Dans le cas de demi-droites $[OA_1)$ et $[OA_2)$ (contenues dans deux droites sécantes) avec $\vec{u}_1 = \frac{1}{OA_1}\overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{u}_2 = \frac{1}{OA_2}\overrightarrow{OA_2}$, Δ_+ est appelée **bissectrice intérieure** de l'angle $(\vec{u}_1 ; \vec{u}_2)$, et Δ_- la **bissectrice extérieure**.

Exercice 1.5.14

1. Montrer que seule la bissectrice intérieure Δ_+ coupe le segment $[A_1A_2]$ en un point A tel que $\vec{\Omega A} = t\vec{v}_+$ pour un certain $t > 0$. (Indication : écrire les équations des droites (A_1A_2) et Δ_+ dans le repère $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$).
2. Montrer que Δ_+ est caractérisée par la relation angulaire suivante : $M \neq \Omega$ appartient à Δ_+ si et seulement si :

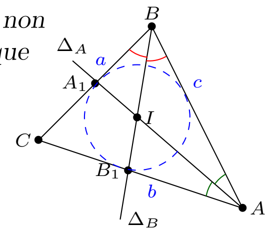
$$\mathrm{mes}(\vec{u}_1; \overrightarrow{\Omega M}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega M}; \vec{u}_2)\ [2\pi] \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{mes}(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = 2\,\mathrm{mes}(\vec{u}_1; \overrightarrow{\Omega M})\ [2\pi].$$

On appelle bissectrices intérieures d'un triangle ABC les trois bissectrices intérieures des couples d'angles de demi-droites $([AB), [AC))$, $([BC), [BA))$ et $([CA), [CB))$.

Proposition 1.5.15: Bissectrices d'un triangle

Les trois bissectrice intérieures d'un triangle ABC non aplati sont concourantes. Le point d'intersection I est le centre de l'unique cercle tangent simultanément aux trois segments $[AB]$ $[BC]$ et $[CA]$. Ce cercle est appelé cercle inscrit au triangle ABC.

Démonstration. Notons Δ_A, Δ_B, Δ_C ces trois bissectrices passant respectivement par A, B, C, et $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.



- ***les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes*** : si Δ_A et Δ_B sont parallèles de vecteur directeur $\vec{u}$ alors $\vec{u}$ serait colinéaire à la fois aux deux vecteurs non nuls $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ et $\frac{1}{a}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{c}\overrightarrow{BA}$ autrement dit, il existerait $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{a}\overrightarrow{BC} - \frac{k}{c}\overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

c'est à dire

$$\left(\frac{1+k}{c} + \frac{k}{a}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{b} - \frac{k}{a}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui est impossible. Donc Δ_A et Δ_B sont sécantes. Notons I le point d'intersection.

- ***la droite (IC) coupe le segment $[AB]$*** : en utilisant 1 de l'exercice 1.5.3, on sait que Δ_A coupe $[BC]$ en un point A_1 et Δ_B coupe $[AC]$ en un point B_1. Plaçons nous dans le repère $(C, \vec{CA}, \vec{CB})$:

$$A(1,0) \quad B(0,1) \quad A_1(0,a_1) \quad B_1(b_1,0) \quad \text{avec} \quad a_1 > 0 \quad b_1 > 0$$

La droite Δ_A a pour équation $x + \frac{1}{a_1}y = 1$ et Δ_B a pour équation $\frac{1}{b_1}x + y = 1$. On en déduit les coordonnées (x_I, y_I) de I :

$$x_I = \frac{b_1(1-a_1)}{1-a_1b_1} \in]0;1[\qquad y_I = \frac{a_1(1-b_1)}{1-a_1b_1} \in]0;1[$$

La droite (CI) a pour équation $\frac{x}{x_1} - \frac{y}{y_I} = 0$ et la droite (AB) pour équation $x + y = 1$ donc elles sont sécantes au point C_1 de coordonnées positives $\left(\frac{x_1}{x_1+y_1}, \frac{y_1}{x_1+y_1}\right)$ situé sur $[AB]$ (on remarque même que $I \in [CC_I]$ puisque $x_I < x_I + y_I$ et $y_I < x_I + y_I$).

- ***Le point I est sur Δ_C***. Comme $I \in \Delta_A$, il est équidistant des deux droites (AB) et (AC) et comme $I \in \Delta_B$, il est équidistant des deux droites (BC) et (BA). Par conséquent il est équidistant des deux droites (CA) et (CB) et donc I est sur une des deux bissectrices des droites (CA) et (CB). Remarquons aussi que la droite (CI) coupe nécessairement le segment $[AB]$. Donc $(CI) = \Delta_C$.

Donc les trois bissectrices intérieures sont concourantes en I équidistant des trois segments. Le fait que I est centre du cercle inscrit découle du lemme 1.5.11. L'unicité est laissée en exercice. $\square$

1.5.4 Transformations affines complexes de $\mathbb{C}$

Par la suite, afin de simplifier les écritures, on identifiera les points à leurs affixes. On parlera ainsi indifféremment du point M d'affixe z si on insiste sur l'aspect géométrique, et du point z si on s'intéresse plutôt à l'aspect calculatoire.

Définition 1.5.16

*Une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite **affine complexe** si elle est de la forme*

$$z \mapsto f(z) = az + b$$

*où a et b sont des constantes complexes. L'application $\vec{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\vec{f}(z) = az$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et donc aussi $\mathbb{R}$-linéaire ; on l'appelle la **partie linéaire** de f.*
*On dit que l'application du plan dans le plan envoyant un point $M(z)$ sur un point $M'\big(f(z)\big)$ est une **similitude directe (du plan complexe)** si $a \neq 0$. Pour simplifier, f sera elle-même appelée similitude directe. Sa partie linéaire $\vec{f}$ est une **similitude vectorielle directe**.*

Le cas $a = 0$ n'est pas intéressant dans la mesure où dans ce cas f est constante. Dans la suite, on ne considère que les similitudes directes ($a \neq 0$).

Proposition 1.5.17: Premières propriétés des similitudes directes

1. *L'identité de $\mathbb{C}$, $\mathrm{id} : z \mapsto z$ est une similitude directe.*
2. *La composée de deux similitudes directes est une similitude directe. Cette composée n'est généralement pas commutative.*
3. *Toute similitude directe est bijective et sa bijection réciproque est aussi une similitude directe.*
4. *Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, $f : z \mapsto az + b$ a un unique point fixe d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.*

* * * * * * * * * *

*Les propriétés 1, 2 et 3 nous disent que les similitudes directes du plan complexe forment **un groupe non commutatif** pour la composition. **Dans la suite, on notera** $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ **ce groupe.***

Démonstration. La propriété 1 est évidente. Pour le point 2, si $f(z) = az + b$ et $g(z) = cz + d$ avec $ac \neq 0$ alors

$$f \circ g(z) = a(cz + d) + b = ac\,z + (ad + b), \qquad g \circ f(z) = c(az + b) + d = ac\,z + (bc + d).$$

Ainsi, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des similitudes, distinctes l'une de l'autre si $ad + b \neq bc + d$. De plus

$$\big(f(z) = az + b = \zeta\big) \iff \Big(z = \frac{1}{a}\zeta - \frac{b}{a}\Big) \quad \text{donc} \quad f^{-1}(\zeta) = \frac{1}{a}\zeta - \frac{b}{a}.$$

Ainsi f est bijective et f^{-1} est une similitude. Enfin, si $a \neq 1$, alors

$$\big(f(z) = az + b = z\big) \iff \Big(z = \frac{b}{1-a}\Big)$$

donc $\omega = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe de l'unique point fixe. □

Nota Bene **: Écriture canonique d'une similitude directe à centre**

Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, $f : z \mapsto az + b$ a une écriture unique en fonction de son point fixe :

$$f(z) = a(z - \omega) + \omega = az + (1 - a)\omega \qquad \text{où } \omega = \frac{b}{1 - a} \text{ est l'affixe du point fixe } (f(\omega) = \omega).$$

Proposition 1.5.18

Une similitude directe (du plan complexe) est complètement déterminée de façon unique par deux points distincts $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et leurs images $M_1'(z_1')$ et $M_2'(z_2')$ (également distinctes).

Démonstration. Il suffit de voir que le système (d'inconnues a et b)

$$\begin{cases} az_1 + b = z_1' \\ az_2 + b = z_2' \end{cases}$$

admet une et une seule solution $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ (car $z_1 \neq z_2$) avec $a \neq 0$ (car $z_1' \neq z_2'$). □

Les translations

Si $a = 1$, la similitude $f : z \mapsto az + b = z + b$ est une **translation** (de vecteur $b \in \mathbb{C}$). La partie linéaire d'une translation est l'identité.

Proposition 1.5.19: Premières propriétés des translations

1. *L'identité est une translation (de vecteur nul). Aucune autre translation n'a de point fixe.*
2. *La composée de deux translations est une translation. Cette composée est commutative.*
3. *La bijection réciproque d'une translation est aussi une translation.*
4. *La conjuguée $f \circ t \circ f^{-1}$ d'une translation t par tout similitude f est une translation.*

* * * * * * * * * *

*Les translations forment un sous-groupe (commutatif) pour la composition. La propriété 4 nous dit que ce sous-groupe est **distingué (ou normal)**. **Dans la suite, on notera** $\mathrm{T}(\mathbb{C})$ **ce sous-groupe.***

Démonstration. Les trois premières propriétés sont évidentes.
Vérifions le point 4. Soit $t : z \mapsto z + u$ une translation et $f : z \mapsto az + b$ une similitude. Pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$z \xmapsto{f^{-1}} \frac{z - b}{a} \xmapsto{t} \frac{z - b}{a} + u \xmapsto{f} z + au$$

donc $z \mapsto f \circ t \circ f^{-1}(z) = z + au$ est une translation de vecteur $au = \vec{f}(u)$. □

Proposition 1.5.20: Éléments géométriques conservés par translation

1. *l'alignement : une translation envoie donc toute droite sur une droite.*
2. *les directions : une translation envoie toute droite sur une droite parallèle.*
3. *les distances (on dit que c'est une **isométrie**), l'orientation (on dit que c'est un **déplacement** ou une **isométrie positive**) et par voie de conséquence, les angles orientés.*
   Un cercle est envoyé sur un cercle de même rayon.

Démonstration. Soit $t : z \mapsto z + c$ une translation. Si M_1, M_2 ont pour affixes z_1, z_2, leurs images M_1', M_2' ont pour affixes $z_1' = z_1 + c$, $z_2' = z_2 + c$. Ainsi $\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{M_1M_2}$ car $z_2' - z_1' = z_2 - z_1$. Les propriétés ci-dessus découlent immédiatement de cette remarque. □

Les homothéties

Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, la similitude $h : z \mapsto kz + b$ est une **homothétie** du plan complexe. On inclut également dans les homothéties le cas de l'identité : $k = 1$ et $b = 0$. La partie linéaire d'une homothétie est une **homothétie vectorielle**. Vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ en prenant la base $(1, \mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$, $\vec{h}$ a pour matrice

$$k\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est toujours positif donc elle conserve l'orientation.
Attention : c'est parce que la dimension est 2, qui est paire, que l'orientation est préservée lorsque $k < 0$.
En dehors de l'identité, toute homothétie $h : z \mapsto kz + b$ a un unique point fixe Ω, d'affixe $\omega = \frac{b}{k-1}$.
Le nombre réel k est appelé **rapport** de l'homothétie. Une homothétie différente de l'identité est donc caractérisée par son **centre** et son **rapport** : si $M(z)$ et $M'\big(h(z)\big)$ alors

$$h(z) = k(z - \omega) + \omega = kz + (1-k)\omega \quad \text{ou autrement dit } \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

On distingue deux types d'homothéties très particulières, qui conservent les distances (isométries) :
- l'identité lorsque $k = 1$ et $b = 0$: $f : z \mapsto z$ tous les points sont fixes
- les symétries centrales (de centre ω) lorsque $k = -1$: $f : z \mapsto 2\omega - z$.

Proposition 1.5.21: Premières propriétés des homothéties du plan complexe

1. *La bijection réciproque d'une homothétie de centre d'affixe ω et de rapport k est aussi une homothétie, de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$.*
2. *La conjuguée $f \circ h \circ f^{-1}$ d'une homothétie h par une similitude f est une homothétie de même rapport.*
3. *La composée $h_1 \circ h_2$ (en général non commutative) de deux homothéties h_1 et h_2 de rapports respectifs k_1 et k_2 est*
   - *une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$;*
   - *une translation si $k_1k_2 = 1$.*

* * * * * * * * * *

***Attention** : l'ensemble $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ des homothéties ne forment pas un sous-groupe pour la composition !*

Démonstration.

1. *si $h(z) = k(z-\omega) + \omega$ on a déjà vu que $h^{-1}(\zeta) = \frac{1}{k}(\zeta - \omega) + \omega$.*
2. *Soit $h : z \mapsto k(z-\omega) + \omega = kz + (1-k)\omega$ une homothétie et $f : z \mapsto az + b$ une similitude. Pour tout $z \in \mathbb{C}$*

$$z \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \frac{z-b}{a} \overset{h}{\longmapsto} k\frac{z-b}{a} + (1-k)\omega \overset{f}{\longmapsto} kz + (1-k)(a\omega + b)$$

   donc $z \mapsto f \circ h \circ f^{-1}(z) = kz + (1-k)(a\omega + b)$ est une homothétie de rapport k et de centre d'affixe $f(\omega) = a\omega + b$.
3. *Soient $h_1 : z \mapsto k_1(z - \omega_1) + \omega_1$ et $h_2 : z \mapsto k_2(z - \omega_2) + \omega_2$ deux homothéties. Alors*

$$z \overset{h_2}{\longmapsto} k_2z + (1-k_2)\omega_2 \overset{h_1}{\longmapsto} k_1k_2z + k_1(1-k_2)\omega_2 + (1-k_1)\omega_1$$

   - *si $k_1k_2 = 1$, cette composée $h_1 \circ h_2$ est une translation de vecteur $(k_1 - 1)(\omega_2 - \omega_1)$*
   - *si $k_1k_2 \neq 1$, c'est une homothétie de rapport k_1k_2 et de centre le point d'affixe*

$$\frac{1-k_1}{1-k_1k_2}\omega_1 + \frac{k_1 - k_1k_2}{1-k_1k_2}\omega_2.$$

   Remarque : généralement $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$ (les indices 1 et 2 n'ont pas des rôles symétriques).

□

Proposition 1.5.22: Éléments géom. conservés par homothétie du plan complexe

1. *L'alignement : une homothétie envoie toute droite sur une droite ;*
2. *Les directions : une homothétie envoie toute droite sur une droite parallèle ;*
3. *Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$ et conserve l'orientation. Par voie de conséquence, elle conserve les angles orientés (on dit que ce sont des applications* **conformes***). Un cercle de rayon r est envoyé sur un cercle de rayon $|k| \times r$.*

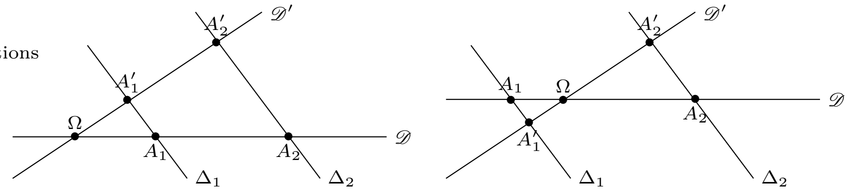
Démonstration. Soit $h : z \mapsto k(z-\omega)+\omega$ une homothétie. Si M_1, M_2 sont deux points d'affixes z_1 et z_2, leurs images M_1', M_2' ont pour affixes $z_1' = k(z_1-\omega)+\omega$ et $z_2' = k(z_2-\omega)+\omega$. Ainsi $\overrightarrow{M_1'M_2'} = k\overrightarrow{M_1M_2}$ car $z_2'-z_1' = k(z_2-z_1)$. Les propriétés ci-dessus découlent de cette remarque. □

Corollaire 1.5.23: Le théorème de Thalès pour des triangles

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes en un point $\Omega(\omega)$, Δ_1 et Δ_2 deux droites sécantes avec $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ en dehors du point Ω. On note respectivement $M_1(z_1)$ et $M_1'(z_1')$ les points d'intersection de Δ_1 avec $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, $M_2(z_2)$ et $M_2'(z_2')$ les points d'intersection de Δ_2 avec $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

1. *si Δ_1 est parallèle à Δ_2 alors on a égalité des rapports (réels)*
$$\frac{\overline{\Omega M_2}}{\overline{\Omega M_1}} = \frac{z_2-\omega}{z_1-\omega} = \frac{z_2'-\omega}{z_1'-\omega} = \frac{\overline{\Omega M_2'}}{\overline{\Omega M_1'}}.$$
2. *Réciproquement, si on a égalité des rapports réels $\frac{z_2-\omega}{z_1-\omega}$ et $\frac{z_2'-\omega}{z_1'-\omega}$ alors Δ_2 est parallèle à Δ_1.*

Les deux configurations de Thalès



Démonstration.

1. *L'homothétie de centre Ω et de rapport $k = \frac{z_2-\omega}{z_1-\omega}$ envoie M_1 sur M_2 et donc envoie la droite Δ_1, contenant M_1, sur une droite qui lui est parallèle, contenant M_2, c'est à dire Δ_2. D'autre part toute droite passant par Ω est globalement conservée (puisque qu'une telle droite est envoyée sur une droite qui lui est parallèle et passant par Ω puisqu'il est fixe). Donc $M_1' \in \mathscr{D}' \cap \Delta_1$ est envoyé sur l'unique point de l'intersection $\mathscr{D}' \cap \Delta_2$ c'est à dire M_2'. Par conséquent :*
$$k = \frac{z_2'-\omega}{z_1'-\omega}.$$
2. *Réciproquement, l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{z_2-\omega}{z_1-\omega} = \frac{z_2'-\omega}{z_1'-\omega}$ envoie M_1 sur M_2 et M_1' sur M_2' donc Δ_1 sur Δ_2. Donc ces droites sont parallèles.*

□

Proposition 1.5.24: Groupe des homothéties-translations

L'ensemble $\mathrm{HT}(\mathbb{C}) = \mathrm{H}(\mathbb{C}) \cup \mathrm{T}(\mathbb{C})$ constitué des homothéties et des translations du plan complexe est un sous-groupe non commutatif de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$. Le rapport d'une homothétie-translation est le rapport de l'homothétie si c'en est une et 1 si c'est une translation.

Ce sous-groupe $\mathrm{HT}(\mathbb{C})$ de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ est le **groupe des homothéties-translations** (ou parfois des **dilatations**, dénomination trompeuse car utilisée dans d'autres contextes).

Il satisfait les propriétés suivantes (la plupart sont déjà démontrées) :

1. $\mathrm{HT}(\mathbb{C})$ est invariant par conjugaison (c'est un sous-groupe distingué), c'est à dire si $f \in \mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ et $g \in \mathrm{HT}(\mathbb{C})$, alors $f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{HT}(\mathbb{C})$ (cf. propositions 1.5.19 et 1.5.21).
2. $\mathrm{T}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{HT}(\mathbb{C})$ (cas particulier de la proposition 1.5.19).
3. Une similitude directe est une homothétie-translation si et seulement si sa partie linéaire est une homothétie vectorielle (cf. définition 1.5.16).
4. Une homothétie-translation envoie toute droite sur une droite parallèle, et ce sont les seules similitudes directes à satisfaire cette propriété (c'est conséquence du point précédent : conservation de la direction vectorielle).
5. Considérons les éléments suivants de $\mathrm{HT}(\mathbb{C})$: $h_1 : z \mapsto k_1 z + (1-k_1)\omega_1$, $h_2 : z \mapsto k_2 z + (1-k_2)\omega_2$, $(k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\})$ $t_1 : z \mapsto z + u_1$ et $t_2 : z \mapsto z + u_2$. Par composition, on obtient :
   - $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1 : z \longmapsto z + (u_1 + u_2)$ est une translation de vecteur $u_1 + u_2$;
   - $h_1 \circ t_2 : z \longmapsto k_1(z + u_2) + (1-k_1)\omega_1 = k_1 z + (1-k_1)\left(\omega_1 - \frac{k_1}{1-k_1} u_2\right)$ est une homothétie de rapport k_1 et de centre d'affixe $\omega_1 - \frac{k_1}{1-k_1} u_2$;
   - $t_2 \circ h_1 : z \longmapsto k_1 z + (1-k_1)\omega_1 + u_2 = k_1 z + (1-k_1)\left(\omega_1 + \frac{1}{1-k_1} u_2\right)$ est une homothétie de rapport k_1 et de centre d'affixe $\omega_1 + \frac{1}{1-k_1} u_2$;
   - $h_1 \circ h_2 : z \longmapsto k_1 k_2 z + k_1(1-k_2)\omega_2 + (1-k_1)\omega_1$ est
     — une translation de vecteur $(k_1 - 1)(\omega_2 - \omega_1)$ si $k_1 k_2 = 1$;
     — une homothétie de rapport $k_1 k_2$ et de centre d'affixe $\omega = \frac{1-k_1}{1-k_1k_2}\omega_1 + \frac{k_1 - k_1 k_2}{1-k_1k_2}\omega_2$ si $k_1 k_2 \neq 1$.
6. Les homothéties ne forment pas un sous-groupe, cependant l'ensemble $\mathrm{H}_\omega(\mathbb{C})$ des homothéties fixant un même point d'affixe ω forment un sous-groupe de $\mathrm{HT}(\mathbb{C})$ et donc de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$, qui n'est distingué ni dans l'un ni dans l'autre : si f est une similitude et $h \in \mathrm{H}_\omega(\mathbb{C})$, alors $f \circ h \circ f^{-1} \in \mathrm{H}_{f(\omega)}(\mathbb{C})$.

Proposition 1.5.25: Relation vectorielle caractéristique d'une homothétie-translation

Soient $A(a), B(b), A'(a'), B'(b')$ quatre points du plan tels que $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $k \neq 0$. Alors l'unique similitude directe envoyant A sur A' et P sur Q est une homothétie-translation. Plus précisément :
- *— si $k = 1$, c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ d'affixe $a' - a = b' - b$;*
- *— si $k \neq 1$, c'est une homothétie de rapport $k = \frac{a'-b'}{b-a}$, et si les quatre points A, A', B, B' ne sont pas alignés, le centre est le point Ω d'affixe $\omega = b' - kb = a' - ka$, situé à l'intersection des deux droites (AA') et (BB') (configuration de Thalès).*

Théorème 1.5.26: Théorème de Thalès

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non confondues et Δ_1, Δ_2 Δ_3 trois droites sécantes avec $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ aux points $M_1(z_1), M_1'(z_1'), M_2(z_2), M_2'(z_2'), M_3(z_3), M_3'(z_3')$ ($M_i \in \mathscr{D} \cap \Delta_i$ et $M_i' \in \mathscr{D}' \cap \Delta_i$, pour $i \in \{1,2,3\}$). On suppose Δ_1 et Δ_2 strictement parallèles.

1. *Si Δ_3 est parallèle à Δ_1 et Δ_2 alors on a égalité des rapports (réels)*
$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_3' - z_1'}{z_2' - z_1'}.$$
2. *Réciproquement, si on a égalité des rapports (réels) $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_3' - z_1'}{z_2' - z_1'}$ alors Δ_3 est parallèle à Δ_1 et Δ_2.*

<u>*Démonstration.*</u> *Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles la translation t de vecteur $\overrightarrow{M_1M_1'}$ envoie M_2 sur M_2 :*

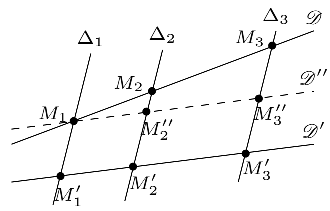
$$\overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'} \quad \text{donc} \quad z_1' - z_1 = z_2' - z_2 \quad \text{ou encore} \quad z_2' - z_1' = z_2 - z_1.$$

Alors Δ_3 est parallèle à Δ_1 si et seulement si $t(M_3) = M_3'$ c'est à dire $\overrightarrow{M_3M_3'} = \overrightarrow{M_1M_1'}$ autrement dit si et seulement si $z_3' - z_3 = z_1' - z_1 = z_2' - z_2$ c'est à dire :

$$\frac{z_3' - z_1'}{z_2' - z_1'} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, on introduit la droite $\mathscr{D}''$ parallèle à $\mathscr{D}'$ en A_1, intersectant Δ_2 en M_2'' et Δ_3 en M_3''. On se ramène d'une part au cas précédent avec les droites $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$:

Δ_3 est parallèle à Δ_1 si et seulement si $\quad \dfrac{z_3'' - z_1}{z_2'' - z_1} = \dfrac{z_3' - z_1'}{z_2' - z_1'}$



et en vertu du théorème de Thalès dans le triangle pour les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}''$:

Δ_3 est parallèle à Δ_2 si et seulement si $\quad \dfrac{z_3'' - z_1}{z_2'' - z_1} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$

Ce qui donne le théorème de Thalès et sa réciproque. □

Exercice 1.5.27

En exercice, démontrer les théorèmes suivants en utilisant les homothéties-translations.

Théorème 1.5.28: Théorème de Desargues affine

Soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$ trois droites non confondues et A, B deux points de $\mathscr{D}$, A', B' deux points de $\mathscr{D}'$ A'', B'' deux points de $\mathscr{D}''$.

1. *Si les trois droites $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$ sont parallèles ou concourantes alors*

$$((AA') \mathbin{/\!/} (BB') \quad \text{et} \quad (A'A'') \mathbin{/\!/} (B'B'')) \implies ((AA'') \mathbin{/\!/} (BB'')).$$

2. *Réciproquement, si $(AA') \mathbin{/\!/} (BB')$, $\quad (A'A'') \mathbin{/\!/} (B'B'')$ $\quad$ et $\quad (AA'') \mathbin{/\!/} (BB'')$ alors les trois droites $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$ sont parallèles ou concourantes.*

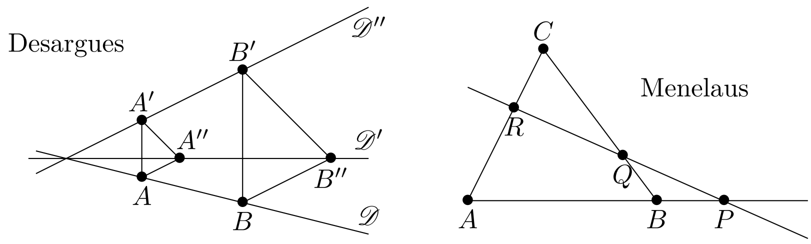
Indication : on suppose $(AA') \mathbin{/\!/} (BB')$ et $(A'A'') \mathbin{/\!/} (B'B'')$ et on considère l'homothétie-translation envoyant A sur B et A' sur B'.

Théorème 1.5.29: Théorème de Menelaus

Soit ABC un triangle non aplati et P, Q, R trois points distincts de A, B et C situés de façon suivante : $P \in (AB) \qquad Q \in (BC) \qquad R \in (CA)$. Les points P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \times \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \times \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = 1.$$

Indication : on considère la composée des trois homothéties h_P de centre P, h_Q de centre Q, h_R de centre R, envoyant respectivement A sur B, B sur C et C sur A : on remarque qu'elle a nécessairement un point fixe parmi A, B ou C.



Les rotations

Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, la similitude $\rho : z \mapsto az + b$ est une **rotation** du plan complexe. On inclut également dans les rotations le cas de l'identité : $a = 1$ et $b = 0$. La partie linéaire d'une rotation est une **rotation vectorielle**. Vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ en prenant la base $(1, \mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$, $\vec{\rho}$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Son déterminant vaut 1 donc elle conserve l'orientation.
En dehors de l'identité, toute rotation $\rho : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + b$ ($\theta \neq 0\ [2\pi]$) a un unique point fixe Ω, d'affixe $\omega = \frac{b}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$. Le nombre réel θ est appelé **angle** (mesure d'angle) de la rotation. Une rotation différente de l'identité est donc caractérisée par son **centre** et son **angle** : si $M(z)$ et $M'\big(\rho(z)\big)$ alors

$$\rho(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + \big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega \quad \text{c'est à dire } \rho(z) - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) : \left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{array} \right.$$

On distingue deux types de rotations très particulières :
— l'identité lorsque $a = 1$ et $b = 0$: $f : z \mapsto z$ tous les points sont fixes
— les symétries centrales (de centre $\Omega(\omega)$, d'angle π) lorsque $a = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$: $f : z \mapsto 2\omega - z$.

Proposition 1.5.30: Premières propriétés des rotations du plan complexe

1. *La bijection réciproque d'une rotation de centre d'affixe ω et d'angle de mesure θ est aussi une rotation, de même centre et d'angle de mesure $-\theta$*
2. *La conjuguée $f^{-1} \circ \rho \circ f$ d'une rotation ρ par une similitude f est une rotation de même angle.*
3. *La composée $\rho_1 \circ \rho_2$ (en général non commutative) de deux rotations ρ_1 et ρ_2 d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est*
   — *une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0\ [2\pi]$;*
   — *une translation si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0\ [2\pi]$.*

* * * * * * * * * *

Attention *: l'ensemble* $\mathrm{R}(\mathbb{C})$ *des rotations ne forment pas un sous-groupe pour la composition !*

Démonstration. *Elle est assez semblable à celle de la proposition 1.5.21*

1. *si $\rho(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega$ on a déjà vu que $\rho^{-1}(\zeta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(\zeta - \omega) + \omega$.*
2. *Soit $\rho : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\omega$ une rotation et $f : z \mapsto az + b$ une similitude. Pour tout $z \in \mathbb{C}$*

$$z \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \frac{z-b}{a} \overset{\rho}{\longmapsto} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-b}{a} + \big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\omega \overset{f}{\longmapsto} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + \big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)(a\omega + b)$$

donc $z \mapsto f \circ \rho \circ f^{-1}(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(a\omega + b)$ est une rotation d'angle de mesure θ et de centre d'affixe $f(\omega) = a\omega + b$.

3. *Soient* $\rho_1 : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(z-\omega_1)+\omega_1$ *et* $\rho_2 : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}(z-\omega_2)+\omega_2$ *deux rotations. Alors*

$$z \overset{\rho_2}{\longmapsto} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}z+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})\omega_2 \overset{\rho_1}{\longmapsto} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}z+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})\omega_2+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})\omega_1$$

donc
— *si* $\theta_1+\theta_2=0\ [2\pi]$, *cette composée* $\rho_1\circ\rho_2$ *est une translation de vecteur* $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}-1)(\omega_2-\omega_1)$
— *si* $\theta_1+\theta_2\neq 0\ [2\pi]$, *c'est une rotation d'angle de mesure* $\theta_1+\theta_2$ *et de centre le point d'affixe*

$$\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}}\omega_1+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}}\omega_2.$$

Remarque : généralement $\rho_1\circ\rho_2\neq\rho_2\circ\rho_1$ *(les indices 1 et 2 n'ont pas des rôles symétriques).*

□

Proposition 1.5.31: Éléments géom. conservés par rotation du plan complexe

1. *l'alignement : une rotation envoie toute droite sur une droite ;*
2. *les distances (c'est une* ***isométrie****), l'orientation (c'est un* ***déplacement*** *ou une* ***isométrie positive****) et par voie de conséquence, les angles orientés.*
   Un cercle est envoyé sur un cercle de même rayon.

Démonstration. *Soit* $\rho : z \mapsto k(z-\omega)+\omega$ *une rotation. Si* M_1, M_2 *sont deux points d'affixes* z_1 *et* z_2, *leurs images* M_1', M_2' *ont pour affixes* $z_1'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z_1-\omega)+\omega$ *et* $z_2'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z_2-\omega)+\omega$. *Ainsi* $z_2'-z_1'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z_2-z_1)$, *donc* $M_1'M_2'=|z_2'-z_1'|=|z_2-z_1|=M_1M_2$. *Les propriétés ci-dessus découlent immédiatement de cette remarque.* □

Proposition 1.5.32: Groupe des déplacements

L'ensemble $\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})=\mathrm{R}(\mathbb{C})\cup\mathrm{T}(\mathbb{C})$ *constitué des rotations et des translations du plan complexe est un sous-groupe non commutatif de* $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

Ce sous-groupe de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ est le **groupe des déplacements**, ou des **isométries positives**.

Il satisfait les propriétés suivantes (la plupart sont déjà démontrées) :

1. $\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$ est invariant par conjugaison (c'est un sous-groupe distingué), c'est à dire si $f\in\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$ et $g\in\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$, alors $f\circ g\circ f^{-1}\in\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$ (cf. propositions 1.5.19 et 1.5.30).
2. $\mathrm{T}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$ (cas particulier de la proposition 1.5.19).
3. Une similitude directe est un déplacement si et seulement si sa partie linéaire est une rotation vectorielle (cf. définition 1.5.16).
4. Un déplacement envoie toute droite sur une droite et tout cercle sur un cercle de même rayon (ce sont les seules similitudes directes satisfaisant cette propriété)
5. Considérons les éléments suivants de $\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$:
   $\rho_1 : z\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}z+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})\omega_1$, $\rho_2 : z\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}z+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})\omega_2)$, $t_1 : z\mapsto z+u_1$ et $t_2 : z\mapsto z+u_2$. Par composition, on obtient :
   - $t_1\circ t_2=t_2\circ t_1 : z\longmapsto z+(u_1+u_2)$ est une translation de vecteur u_1+u_2 ;
   - $\rho_1\circ t_2 : z\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(z+u_2)+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})\omega_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}z+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})\Big(\omega_1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}u_2\Big)$ est une rotation d'angle θ_1 et de centre d'affixe $\omega_1-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}u_2$;
   - $t_2\circ\rho_1 : z\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}z+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})\omega_1+u_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}z+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})\Big(\omega_1+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}u_2\Big)$ est une rotation d'angle θ_1 et de centre d'affixe $\omega_1+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}u_2$;
   - $\rho_1\circ\rho_2 : z\longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}z+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})\omega_2+(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})\omega_1$ est

— soit une translation de vecteur $(e^{i\theta_1}-1)(\omega_2-\omega_1)$ si $\theta_1+\theta_2=0\ [2\pi]$;
— soit une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$ et de centre d'affixe $\omega=\frac{1-e^{i\theta_1}}{1-e^{i(\theta_1+\theta_2)}}\omega_1+\frac{e^{i\theta_1}-e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1-e^{i(\theta_1+\theta_2)}}\omega_2$ si $\theta_1+\theta_2\neq 0\ [2\pi]$.

6. Les rotations ne forment pas un sous-groupe, cependant l'ensemble $\mathrm{R}_\omega(\mathbb{C})$ des rotations fixant un même point d'affixe ω forment un sous-groupe de $\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$ et donc de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$, qui n'est distingué ni dans l'un ni dans l'autre : si f est une similitude et $\rho\in\mathrm{R}_\omega(\mathbb{C})$, alors $f\circ\rho\circ f^{-1}\in\mathrm{R}_{f(\omega)}(\mathbb{C})$.

Propriétés générales des similitudes directes

Remarque : $\mathrm{HT}_\omega(\mathbb{C})\cap\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$ est l'ensemble des demi-tours (symétries centrales) $z\mapsto 2\omega-z$ auquel on adjoint les translations. C'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{HT}_\omega(\mathbb{C})$, de $\mathrm{Is}^+(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{Sim}^+(\mathbb{C})$.

Théorème 1.5.33: Décomposition d'une similitude

1. *Toute similitude directe du plan complexe est la composée de translations, de rotations et d'homothéties (on dit que ces transformations* ***engendrent*** *le groupes des similitudes directes).*
2. ***Toute similitude qui n'est pas une translation se décompose de façon unique en la composée commutative d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation. De plus cette homothétie et cette rotation ont même centre.***

Démonstration.

1. *Soit $f: z\mapsto az+b$, $a\neq 0$ une similitude. On pose $k=|a|$ et $e^{i\theta}=\frac{a}{k}$. Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$*

$$z\overset{\rho}{\longmapsto} e^{i\theta}z\overset{h}{\longmapsto} ke^{i\theta}z=az\overset{t}{\longmapsto} az+b \qquad \text{donc } f=t\circ h\circ\rho.$$

2. *Si $f: z\mapsto az+b$ n'est pas une translation, alors $a\neq 1$ et $\omega=\frac{b}{1-a}$ est point fixe. On pose $k=|a|$ et $e^{i\theta}=\frac{a}{k}$. Alors f est la composée commutative de la rotation ρ d'angle θ et de l'homothétie h de rapport k qui ont pour centre commun le point d'affixe ω.*

$$z\overset{\rho}{\longmapsto} e^{i\theta}(z-\omega)+\omega\overset{h}{\longmapsto} ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega=a(z-\omega)+\omega=az+b$$

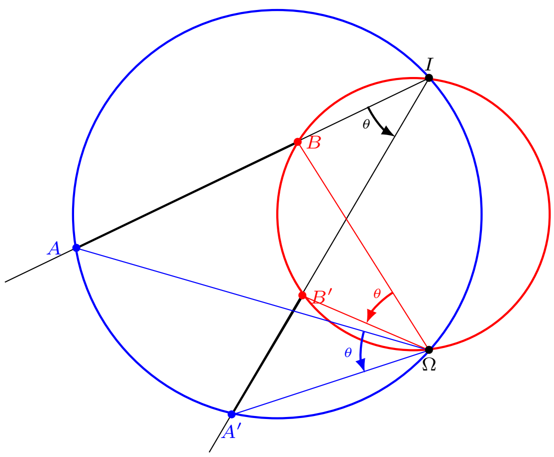
$$z\overset{h}{\longmapsto} k(z-\omega)+\omega\overset{\rho}{\longmapsto} ke^{i\theta}(z-\omega)+\omega=a(z-\omega)+\omega=az+b$$

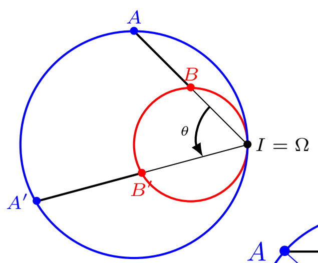
Si maintenant $f=h_1\circ\rho_2=\rho_2\circ h_1$ où h_1 est une homothétie de rapport positif et de centre ω_1 et ρ_2 une rotation de centre ω_2 alors $h_1\circ\rho_2(\omega_1)=\rho_2\circ h_1(\omega_1)=\rho_2(\omega_1)$ donc $\rho_2(\omega_1)$ est fixe par h_1. Ainsi,
— *soit $h_1=\mathrm{id}_\mathbb{C}$ auquel cas $f=\rho_2$, et donc $k=1$, $h=h_1=\mathrm{id}_\mathbb{C}$ et $\rho_2=\rho$;*
— *soit $\rho_2=\mathrm{id}_\mathbb{C}$ auquel cas $f=h_1$, et donc $\theta=0\ [2\pi]$, $\rho=\rho_2=\mathrm{id}_\mathbb{C}$ et $h_1=h$;*
— *soit $\omega_1=\omega_2=\omega$. Dans ce cas, on a de façon évidente que $h_1=h$ et $\rho_2=\rho$.* □

Nota Bene

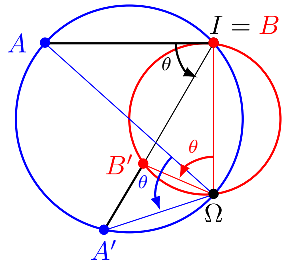
- Soit $f : z \mapsto az+b$ ($a \neq 0$) une similitude complexe. Si f n'est pas une translation ($a \neq 1$), f est caractérisée par son centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, son rapport (positif) $k = |a|$, son angle de mesure $\theta = \arg a$.
  Vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ en prenant la base $(1, \mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$, la partie linéaire $\vec{f}$ de f a pour matrice
  $$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) & -\mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
  Son déterminant vaut $k^2 > 0$ donc elle conserve l'orientation.
- Les similitudes directes du plan complexe
  1. conservent l'alignement : une droite de vecteur directeur u est envoyée sur une droite de vecteur directeur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}u$.
  2. multiplient les distances par leur rapport $k > 0$, les aires par k^2 ;
     conserve l'orientation, les angles orientés (applications **conformes**) ;
     envoient un cercle de rayon r sur un cercle de rayon $k \times r$.
- Une similitude directe (du plan complexe) est complètement déterminée de façon unique par deux points distincts et leurs images (également distinctes).
- Étant donnés deux triangles non équilatéraux ayant les mêmes angles orientés aux sommets (triangles semblables). Il existe une unique similitude directe envoyant le prmier triangle sur le second.

Centre d'une similitude donnée par deux points distincts A et B et leurs images A' et B'. Dans le cas générique où (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en $I \notin \{A, B, A', B'\}$, et les cercles circonscrits aux triangles $AA'I$ et $BB'I$ s'intersectent en I et un autre point Ω. Alors Ω est centre de la similitude envoyant A sur A' et B sur B'.





Cas particuliers



Cas particuliers :

- Si (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en $I \notin \{A, B, A', B'\}$, et les cercles circonscrits aux triangles $AA'I$ et $BB'I$ sont tangents en I, alors $\Omega = I$ est centre de la similitude envoyant A sur A' et B sur B'.
- Si (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en $I \in \{A, B, A', B'\}$, par exemple $I = B$ le cercle circonscrit au triangle $AA'I$ intersecte le cercle tangent à $[AB]$ en $I = B$ passant par B' et Ω centre de la similitude envoyant A sur A' et B sur B' (situation semblable pour $I = A$, $I = A'$ ou $I = B'$).
- Reste le cas où (AB) et $(A'B')$ sont parallèles auquel cas la similitude est une homothétie-translation, cas déjà traité dans la proposition 1.5.25

Chapitre 2

Géométrie affine

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, les espaces vectoriels sont réels (le corps des scalaires est $\mathbb{R}$), et de dimension finie. La plupart des exemples se feront en dimension 2 ou 3.

2.1 Espace affine

Définition 2.1.1: Espace affine

*Soit $\mathscr{E}$ un ensemble et E un espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{E}$ est muni d'une structure d'**espace affine** (de direction vectorielle E) s'il existe une application*

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \mathscr{E} \times \mathscr{E} & \to & E \\ (M,N) & \mapsto & \Theta(M,N) = \overrightarrow{MN} \end{array}$$

vérifiant les deux axiomes :

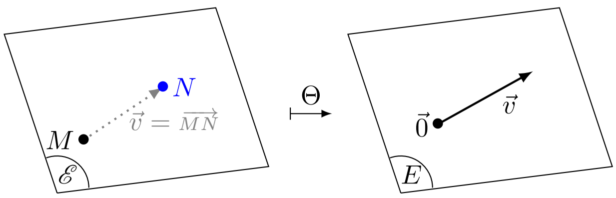
(EA1) $\forall M \in \mathscr{E}, \forall \vec{v} \in E, \exists! N \in \mathscr{E} \quad \vec{v} = \overrightarrow{MN}$;

(EA2) $\forall A, B, C \in \mathscr{E} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

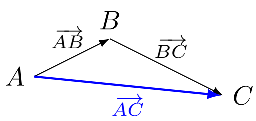
* * * * * * * * * *

*Les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés des **points**. La **dimension** de $\mathscr{E}$ est la dimension de E.*

(EA1)



(EA2)



Remarques 2.1.2

1. L'unique point N de l'axiome (EA1) est souvent noté $N = M + \vec{v}$.
   Autrement dit, $(N = M + \vec{v}) \iff (\overrightarrow{MN} = \vec{v})$. Pour $\vec{v} \in E$ fixé, l'application

   $$\tau_{\vec{v}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & \mathscr{E} \\ M & \mapsto & M + \vec{v} \end{array}$$

   est bijective d'après (EA1) : c'est la **translation** de vecteur $\vec{v}$.
   Ce $+$ (en bleu) indique que l'on **translate** M au moyen du vecteur $\vec{v}$: ne pas confondre avec le $+$ de la somme des vecteurs de l'axiome (EA2). Je ferai petit à petit disparaître sa

couleur bleue.

2. La relation de l'axiome (EA2) est appelée relation de Chasles.
3. Un ensemble réduit à un point est un espace affine de dimension nulle, dirigé par l'espace vectoriel trivial $\{\vec{0}\}$.
4. Certains auteurs considèrent $\varnothing$ comme espace affine qui n'a pas de dimension.

Nota Bene

Dans un espace affine sans autre précision, il n'y a pas de notion de distance, ni de d'angle ou d'orthogonalité.

* * * * * * * * * *

En revanche, la notion de « rapport de distance » que l'on trouve parfois dans l'énoncé de certains théorèmes (comme le théorème de Thalès par exemple) a un sens mais ne dépend pas du choix d'une distance (euclidienne) : elle ne traduit que la proportionnalité des vecteurs, c'est à dire la multiplication des vecteurs par les scalaires.

Vectorialisation

L'axiome (EA1) nous dit que Θ est surjective (attention : Θ n'est pas injective !) et que pour $\Omega \in \mathscr{E}$ fixé, l'application

$$\theta_\Omega = \Theta(\Omega, \cdot) : \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & E \\ N & \mapsto & \Theta(\Omega, N) = \overrightarrow{\Omega N} \end{array}$$

est bijective. On l'appelle la **vectorialisation de $\mathscr{E}$ en Ω**. On appelle Ω l'**origine**.

En d'autres termes, on peut toujours se ramener à la notion d'espace vectoriel en fixant un point comme « origine ». Attention : le choix d'une origine est souvent arbitraire et n'a rien de canonique.

Conséquences de le relation de Chasles

Comme conséquences de la relation de Chasles on a :

$$\forall M \in \mathscr{E} \quad \overrightarrow{MM} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \forall (M,N) \in \mathscr{E}^2 \quad \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$$

et par conséquent l'axiome (EA1) a son pendant avec l'autre point :

$$\forall N \in \mathscr{E}\ \forall \vec{v} \in E \quad \exists! M \in \mathscr{E} \quad \vec{v} = \overrightarrow{MN}.$$

Ainsi $(N = M + \vec{v}) \iff (\vec{v} = \overrightarrow{MN}) \iff (M = N + (-\vec{v}))$.
Pour simplifier, on utilise la notation $N + (-\vec{v}) = N - \vec{v}$.

On utilise parfois la notation $\overrightarrow{AB} = B - A$ dont la cohérence est justifiée par les points précédents :

$$\begin{aligned} A + (B - A) &= A + \overrightarrow{AB} \\ &= B \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (B - A) + (C - B) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} = C - A \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -(B - A) &= -\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BA} = A - B. \end{aligned}$$

Il faut être vigilant sur cette notation : si A et B sont dans $\mathscr{E}$, en revanche $B - A \in E$.
Je ferai petit à petit disparaître sa couleur rouge.

Définition alternative : action par translation

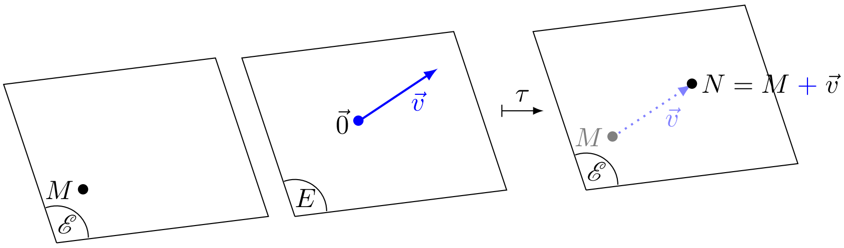
Proposition 2.1.3: Définition alternative d'espace affine

*Soit $\mathscr{E}$ un ensemble et E un espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{E}$ est muni d'une structure d'**espace affine** (de direction vectorielle E) si et seulement si il existe une opération externe (opération de translation, notée $+$)*

$$\begin{array}{rccc} \tau: & \mathscr{E}\times E & \to & \mathscr{E} \\ & (M,\vec{v}) & \mapsto & \tau(M,\vec{v}) = M+\vec{v} \end{array}$$

vérifiant

(EA3) $\forall M\in\mathscr{E} \quad \forall \vec{v}_1,\vec{v}_2\in E,\quad M+(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = (M+\vec{v}_1)+\vec{v}_2\,;$
(EA4) $\forall M,N\in\mathscr{E} \quad \exists!\vec{v}\in E,\quad M+\vec{v}=N.$



Démonstration.

1. *Si $(\mathscr{E},E)$ satisfait les axiomes (EA1) et (EA2), l'application τ définie par*

$$\begin{array}{rccc} \tau: & \mathscr{E}\times E & \to & \mathscr{E} \\ & (M,\vec{v}) & \mapsto & \tau(M,\vec{v}) = M+\vec{v} \end{array}$$

satisfait les deux axiomes (EA3) et (EA4) :

⋆ *Soient $M\in\mathscr{E}$ et $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in E$. On sait de (EA1) qu'il existe un unique $N_1\in\mathscr{E}$ tel $\vec{v}_1=\overrightarrow{MN_1}$ et un unique $N_2\in\mathscr{E}$ tel que $\vec{v}_2=\overrightarrow{N_1N_2}$. Alors d'après EA2 (relation de Chasles), on a :*

$$M+(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = M+(\overrightarrow{MN_1}+\overrightarrow{N_1N_2}) = M+\overrightarrow{MN_2} = N_2$$

$$(M+\vec{v}_1)+\vec{v}_2 = (M+\overrightarrow{MN_1})+\overrightarrow{N_1N_2} = N_1+\overrightarrow{N_1N_2} = N_2$$

d'où l'axiome (EA3).

⋆ *Soit $(M,N)\in\mathscr{E}^2$. Le seul vecteur satisfaisant $M+\vec{v}=N$ est par définition le vecteur $\vec{v}=\Theta(M,N)=\overrightarrow{MN}$. D'où l'axiome (EA4).*

2. *Réciproquement, si $(\mathscr{E},E)$ satisfait les axiomes (EA3) et (EA4), on considère l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Theta: & \mathscr{E}\times \mathscr{E} & \to & E \\ & (M,N) & \mapsto & \Theta(M,N) = \overrightarrow{MN} \end{array}$$

où $\overrightarrow{MN}$ est l'unique vecteur défini par l'axiome (EA4). Cette application satisfait les deux axiomes (EA1) et (EA2) :

⋆ *Soient $M\in\mathscr{E}$ et $\vec{v}\in E$. On pose $N=M+\vec{v}$. Alors en vertu de (EA4), $\vec{v}=\overrightarrow{MN}$. Si N' est un autre point tel que $\vec{v}=\overrightarrow{MN'}$, alorspar définition de $\overrightarrow{MN'}$, $N'=M+\vec{v}=N$. D'où l'axiome (EA1).*

⋆ *Soit $A,B,C\in\mathscr{E}$. Alors d'après (EA3)*

$$A+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = (A+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC} = B+\overrightarrow{BC} = C$$

Or $A+\overrightarrow{AC}=C$ donc par unicité de (EA4), $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. D'où l'axiome (EA2).

□

Remarques 2.1.4

1. L'axiome (EA3) traduit le fait que l'espace vectoriel E **agit** (ou **opère**) sur $\mathscr{E}$ par **translation**. Pour $\vec{v} \in E$ fixé, l'application $\tau_{\vec{v}} = \tau(\cdot, \vec{v}) : M \mapsto \tau(M, \vec{v}) = M + \vec{v}$ est bien sûr la **translation** de vecteur $\vec{v}$.
2. L'axiome (EA4) dit que cette action est **simplement** (unicité) **transitive** (existence). En particulier, l'existence dans (EA4) assure la surjectivité de τ.

Exemples 2.1.5

1. **Structure canonique d'espace affine d'un espace vectoriel**.

   Nota Bene

   Un espace vectoriel E a une structure d'espace affine (dite **canonique**), dirigé par lui-même.
   L'application $\Theta : E \times E \to E$ définie par $\Theta(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$ satisfait $(EA1)$ et $(EA2)$.

   * * * * * * * * * *

   La qualification de « canonique »vient de cette structure est « gratuite » : on n'a besoin d'aucun autre élément que la définition d'espace vectoriel.

   Dans ce cas, l'application $\tau : (A, \vec{v}) \mapsto A + \vec{v}$ n'est rien d'autre que l'addition des vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \mapsto \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Le vecteur nul est alors un point particulier servant naturellement d'origine (voir **vectorialisation** ci-dessus).
2. **Sous-espace affine d'un espace vectoriel**. Si $\vec{f} : E \to F$ est une application linéaire, alors pour tout $\vec{y} \in F$ l'ensemble

$$\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = \{\vec{x} \in E : \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

   est un espace affine de direction vectorielle $\ker \vec{f}$.

   En particulier si $\vec{f} : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire,

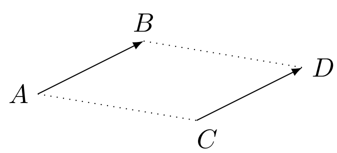
$$\vec{f}^{-1}(\{1\}) = \{\vec{x} \in E : \vec{f}(\vec{x}) = 1\} \qquad \text{(on peut remplacer 1 par tout autre réel)}$$

   est un espace affine de direction vectorielle $\ker \vec{f}$, appelé hyperplan affine.
   Par exemple la droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 1\}$ est un espace affine de direction $\mathrm{Vect}\{(-3, 2)\}$.
3. Si $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont deux espaces affines de directions vectorielles E_1 et E_2, alors $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ a une structure d'espace affine de direction vectorielle $E_1 \times E_2$

Dans la suite de ce paragraphe, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine de direction vectorielle E.

Parallélogramme - équipollence

Soient A, B, C, D quatre points de $\mathscr{E}$. On dit que $ABDC$ est un **parallélogramme** si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Comme conséquence de la relation de Chasles on a :
Si $ABDC$ est un **parallélogramme**, alors il en est de même de $BDCA$, de $DCAB$, de $CABD$, de $CDBA$, de $ACDB$, de $BACD$, de $DBAC$.

Démonstration. *Il suffit de remarquer que* $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}\right)$ *ce qui est une conséquence de le relation de Chasles :*

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

□

La relation entre bi-points :

$$(A,B) \sim (C,D) \qquad \text{si } ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

est une relation d'équivalence appelée **équipollence** (à démontrer en exercice).

Sous-espace affine

Un sous-ensemble non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ est un **sous-espace affine** de $\mathscr{E}$ s'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F. Autrement dit, l'application

$$\begin{array}{rccl} \Theta: & \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \to & E \\ & (M,N) & \mapsto & \Theta(M,N)=\overrightarrow{MN} \end{array}$$

donnant la structure affine de $\mathscr{E}$ satisfait :

1. $\forall (M,N)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F} \qquad \Theta(M,N)=\overrightarrow{MN}\in F$;
2. $\forall M\in\mathscr{F}, \forall \vec{v}\in F, \exists! N\in\mathscr{F} \qquad \vec{v}=\overrightarrow{MN}$.

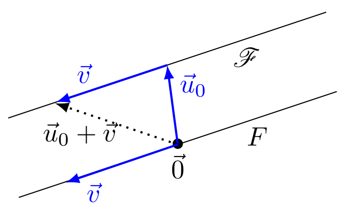
Proposition 2.1.6: Caractérisation d'un sous-espace affine

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $\Omega\in\mathscr{E}$,*
$$\mathscr{F}=\{\Omega+\vec{v} : \vec{v}\in F\}$$
est l'unique sous-espace affine de direction F et passant par Ω.
2. *Réciproquement, un sous-ensemble non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ si et seulement si pour n'importe quel point Ω de $\mathscr{F}$,*
$$F=\{\overrightarrow{\Omega M} : M\in\mathscr{F}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
(F est le vectorialisé de $\mathscr{F}$ en Ω et c'est la direction vectorielle de $\mathscr{F}$).
3. *$\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ si et seulement si $F=\{\overrightarrow{MN} : (M,N)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus F est la direction vectorielle de $\mathscr{F}$.*

Voir la démonstration (page 67)

Exemples 2.1.7

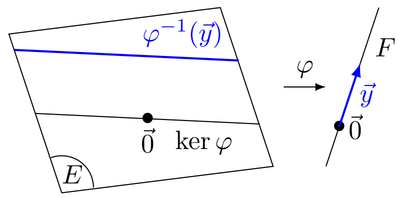
1. Une **droite affine** est un espace ou sous-espace affine de dimension 1, un **plan affine** est un espace ou sous-espace affine de dimension 2.
2. Si H est un hyperplan vectoriel de E, alors tout sous-espace affine $\mathscr{H}$ de $\mathscr{E}$ de direction H est appelé **hyperplan affine**.
   — dans un plan affine, une droite est de codimension 1 ;
   — dans un espace affine de dimension 3, une droite affine est de codimension 2, un plan affine de codimension 1
3. Un sous-espace affine $\mathscr{F}$ d'un espace vectoriel E (muni de sa structure canonique d'espace affine), de direction F, est de la forme
$$\mathscr{F}=\vec{u}_0+F$$
où $\vec{u}_0$ est un vecteur quelconque de $\mathscr{F}$.



4. **Exemple fondamental.** Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, alors pour tout $\vec{y} \in F$ l'ensemble

$$\varphi^{-1}(\vec{y}) = \{\vec{x} \in E : \varphi(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

est un sous-espace affine de E (E est muni de sa structure naturelle d'espace affine) de direction $\ker \varphi$.



(a) Dans $\mathbb{K}^n$, l'ensemble $\mathscr{H}$ défini par une équation linéaire du type

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

est un hyperplan affine de $\mathbb{K}^n$ si les a_k ne sont pas tous nuls (s'ils sont tous nuls, $\mathscr{H} = \varnothing$ si $b \neq 0$ et $\mathscr{H} = \mathbb{K}^n$ si $b = 0$).

(b) Plus généralement, l'ensemble des solutions d'un système linéaire avec second membre, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de direction l'ensemble des solutions du système sans second membre.

$$\begin{pmatrix} \text{Solution générale} \\ \text{du système avec} \\ \text{second membre} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Solution particulière} \\ \text{du système avec} \\ \text{second membre} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Solution générale} \\ \text{du système sans} \\ \text{second membre} \end{pmatrix}$$

(c) On retrouve cette situation pour l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre.

$$\begin{pmatrix} \text{Solution générale} \\ \text{de l'équation} \\ \text{différentielle avec} \\ \text{second membre} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Solution particulière} \\ \text{de l'équation} \\ \text{différentielle avec} \\ \text{second membre} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Solution générale} \\ \text{de l'équation} \\ \text{différentielle sans} \\ \text{second membre} \end{pmatrix}$$

Intersection de sous-espaces affines

Proposition 2.1.8

Si elle n'est pas vide, une intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine.

Démonstration. *Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathscr{E}$, et $(F_i)_{i\in I}$ la famille des sous-espaces vectoriels associée. Notons $\mathscr{F} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ et $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. On sait que F est un sous-espace vectoriel de E. Supposons $\mathscr{F} \neq \varnothing$; soit $\Omega \in \mathscr{F}$. Alors on a*

$$(M \in \mathscr{F}) \iff (\forall i \in I \quad M \in \mathscr{F}_i) \iff \left(\forall i \in I \quad \overrightarrow{\Omega M} \in F_i\right) \iff \left(\overrightarrow{\Omega M} \in F\right)$$

Donc d'après la proposition 2.1.6, $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction vectorielle F. □

Définition 2.1.9: Sous-espace affine engendré

Soit S une partie non vide de $\mathscr{E}$. Le plus petit sous-espace affine contenant S (au sens de l'inclusion), c'est à dire l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant S est appelé ***sous-espace affine engendré par*** *S. On note $\mathrm{Aff}(S)$ ce sous-espace.*

Proposition 2.1.10: Condition de concours de deux sous-espaces affines

Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux sous-espaces affines de directions vectorielles respectives F_1 et F_2. Pour que $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ ne soit pas vide, il faut et il suffit qu'il existe $A_1 \in \mathscr{F}_1$ et $A_2 \in \mathscr{F}_2$ tels que $\overrightarrow{A_1A_2} \in F_1 + F_2$.

Démonstration. *Supposons $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \neq \varnothing$ et soit $\Omega \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$. Alors pour tous $(A_1, A_2) \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$,*

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{\Omega A_2} - \overrightarrow{\Omega A_1} \in F_1 + F_2.$$

Réciproquement, s'il existe $(A_1, A_2) \in \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ tels que $\overrightarrow{A_1A_2} \in F_1 + F_2$, il existe $\vec{v}_1 \in F_1$ et $\vec{v}_2 \in F_2$ tels que

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad \text{donc} \qquad B := A_1 + \vec{v}_1 = A_2 + \vec{v}_2 \in \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2.$$

□

Corollaire 2.1.11

Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont deux sous-espaces affines de directions vectorielles respectives F_1 et F_2

1. *Si $F_1 + F_2 = E$, alors $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \neq \varnothing$..*
2. *Si $F_1 \oplus F_2 = E$, alors $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ ont une intersection réduite à un point.*

Démonstration.

1. *Si $A_1 \in \mathscr{F}_1$ et $A_2 \in \mathscr{F}_2$ on a toujours $\overrightarrow{A_1A_2} \in E = F_1 + F_2$ donc d'après la proposition précédente $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \neq \varnothing$.*
2. *Si A et B sont deux points de $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ alors $\overrightarrow{AB} \in F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ donc $A = B$.*

□

Définition 2.1.12: Parallèlisme

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$, de directions respectives F et G. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles s'ils ont même direction vectorielle, i.e. $F = G$. On note $\mathscr{F} \,/\!/\, \mathscr{G}$.
On dit (parfois) que $\mathscr{F}$ est faiblement parallèle à $\mathscr{G}$ si $F \subset G$. On note également $\mathscr{F} \,/\!/\, \mathscr{G}$.

* * * * * * * * * *

Deux sous-espaces parallèles ont même dimension. Le parallélisme est une relation d'équivalence (relation réflexive symétrique et transitive) mais le « parallélisme au sens faible » n'est que réflexif et transitif, pas symétrique.

Exercices 2.1.13

1. Montrer les propositions « bien connues » suivantes :
   (a) Deux sous-espaces affines parallèles sont ou bien disjoints, ou bien confondus.
   (b) Si $\mathscr{F}$ est faiblement parallèle à $\mathscr{G}$, alors ou bien $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont disjoints, ou bien ou bien $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ distincts.
   (c) Par deux points passe une droite et une seule.
   (d) **« Postulat des parallèles »**. Par tout point d'un espace affine, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.
   (e) Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont deux sous-espaces affines de directions vectorielles respectives F_1 et F_2. telles que $F_1 + F_2 = E$, alors tout sous-espace parallèle à $\mathscr{F}_1$ rencontre tout sous-espace parallèle à $\mathscr{F}_2$.
   (f) Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont deux sous-espaces affines de directions vectorielles respectives F_1 et F_2 telles que $F_1 \oplus F_2 = E$, alors tout sous-espace parallèle à $\mathscr{F}_1$ rencontre tout sous-espace parallèle à $\mathscr{F}_2$ en exactement un point.
   (g) Deux droites d'un espace affine sont ou bien confondues, ou bien strictement parallèles, ou bien sécante en un unique point, ou bien non coplanaires.
2. Étudier (en démontrant vos affirmations) les positions relatives de

(a) deux droites dans un plan affine ; de trois droites dans un plan affine ;
(b) deux droites, puis trois droites dans un espace affine de dimension 3 ;
(c) deux plans, puis trois plans dans un espace affine de dimension 3 ;
(d) une droite et un plan dans un espace dans un espace affine de dimension 3.

2.2 Barycentre - Repère affine

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction vectorielle E (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Système de points pondérés

Un **point pondéré** est un couple formé d'un point et d'un scalaire $(A, \lambda) \in \mathscr{E} \times \mathbb{R}$. Le scalaire λ est le **poids** ou la **masse** de A. Un système de points pondérés est une famille finie $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ de points pondérés. Le scalaire $\alpha = \sum_{i\in I} \alpha_i$ est la **masse totale** du système.

Application vectorielle de Leibniz - barycentre

On généralise ici l'application de vectorialisation θ_A de $\mathscr{E}$ en $A \in \mathscr{E}$ définie par $\theta_A(M) = \overrightarrow{AM}$ à un système de points pondérés. Soit $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de masse totale α. On définit l'**application vectorielle de Leibniz** associée à ce système par

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{L}: & \mathscr{E} & \longrightarrow & E \\ & M & \longmapsto & \mathscr{L}(M) = \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{A_iM}. \end{array}$$

Proposition 2.2.1: Propriétés de l'application de Leibniz

1. *La fonction de Leibniz ne dépend pas de la façon d'indexer le système de points pondérés.*
2. *Si la masse totale α est nulle alors la fonction de Leibniz est constante.*
3. *Si la masse totale α n'est pas nulle alors la fonction de Leibniz est bijective.*

Lemme 2.2.2: Formule de polarisation

On a la relation $\forall (M, N) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E} \qquad \mathscr{L}(N) - \mathscr{L}(M) = \alpha\overrightarrow{MN}$.

Démonstration. ***Formule de polarisation***. *On applique la relation de Chasles*

$$\forall (M, N) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E} \qquad \mathscr{L}(N) - \mathscr{L}(M) = \sum_{i\in I} \alpha_i \left(\overrightarrow{A_iN} - \overrightarrow{A_iM}\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MN}$$

On en déduit immédiatement que si $\alpha = 0$ alors $\mathscr{L}$ est constante et que si $\alpha \neq 0$, $\mathscr{L}$ est injective. Pour la surjectivité, on choisit un point O (i.e. on vectorialise en O).

$$\forall M \in \mathscr{E} \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\alpha}\Big(\mathscr{L}(M) - \mathscr{L}(O)\Big)$$

Soit $\vec{u} \in E$. On pose $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\alpha}\Big(\vec{u} - \mathscr{L}(O)\Big)$. D'après ce qui précède, $\mathscr{L}(M) = \vec{u}$. $\square$

Définition 2.2.3: Barycentre

Si la masse totale $\alpha = \sum_{i\in I}\alpha_i$ n'est pas nulle, l'unique point G tel que $\mathscr{L}(G) = \vec{0}$ est le **barycentre** *du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$. On note souvent :*

$$G = \mathrm{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in I} \qquad \text{ou si } I = \{1, 2, \dots, p\} \qquad G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix}$$

* * * * * * * * * *

Plus généralement, si $(B_j)_{j\in J}$ est un système de points (non nécessairement fini), on dit qu'un point H est **<u>un</u> barycentre** *des $(B_j)_{j\in J}$ s'il existe un sous-ensemble fini $K \subset J$ et des scalaires $(\beta_j)_{j\in K}$ tels que H est barycentre du système de points pondérés $(B_j, \beta_j)_{j\in J}$ (nécessairement $\sum_{j\in K}\beta_j \neq 0$).*

Nota Bene

Si la masse totale $\alpha = \sum_{i\in I}\alpha_i$ du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas nulle, le barycentre G est caractérisé par l'une des deux propriétés suivantes

1. $\sum_{i\in I}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$;
2. $\forall M \in \mathscr{E} \qquad \overrightarrow{MG} = \alpha^{-1}\sum_{i\in I}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ (**Formule de polarisation pour le barycentre**).

Proposition 2.2.4: Opérations sur les barycentres

1. ***Ajout/suppression de points :*** *on ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ si on ajoute ou retire un point avec un coefficient nul ;*

$$\mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p & A_{p+1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix}$$

2. ***Homogénéité :*** *on ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ si on multiplie tous les poids par un même scalaire non nul ;*

$$\text{si } \lambda \neq 0 \quad \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \cdots & \lambda\alpha_p \end{pmatrix}$$

3. ***Associativité :*** *soit $I = \{1, \dots, p+q\}$ et $K = \{p+1, \dots, p+q\} \subset I$.*
Soit $G = \mathrm{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$, $\left(\alpha = \sum_{i\in I}\alpha_i \neq 0\right)$. Supposons que $\beta = \alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_{p+q} \neq 0$. Alors

$$G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p & A_{p+1} & \cdots & A_{p+q} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p & \alpha_{p+1} & \cdots & \alpha_{p+q} \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p & H \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p & \beta \end{pmatrix}$$

où H est le « barycentre partiel » : $\quad H = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_{p+1} & \cdots & A_{p+q} \\ \alpha_{p+1} & \cdots & \alpha_{p+q} \end{pmatrix}$

Voir la démonstration (page 69)

Nota Bene

1. En divisant tous les poids par la masse totale (si elle est non nulle bien sûr), on peut toujours se ramener à une masse totale égale à 1. On parle alors de **barycentre réduit**.
2. Si tous les poids sont égaux (et la masse totale est non nulle), on parle d'**isobarycentre**.
3. Le barycentre ne dépend pas d'une éventuelle origine fixée. Aussi l'écriture suivante est

justifiée par la formule de polarisation :

$$G = \mathrm{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq p} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_p A_p \qquad \text{si} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

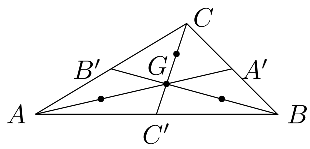
Attention avec cette notation : la somme des poids doit être égale à 1, αA tout seul n'a pas de sens sauf si $\alpha = 1$.

Exemples 2.2.5

1. Le milieu d'un segment $[AB]$ est son isobarycentre $G = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.
2. Si $A \neq B$, la droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres de A et B.
3. Si A, B, C ne sont pas alignés (pas sur une même droite), le plan (ABC) est l'ensemble de tous les barycentres de A, B, C.
4. Intersection des médianes d'un triangle ABC : soit G l'isobarycentre (centre de gravité)

$$G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & A' \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} B & B' \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} C & C' \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

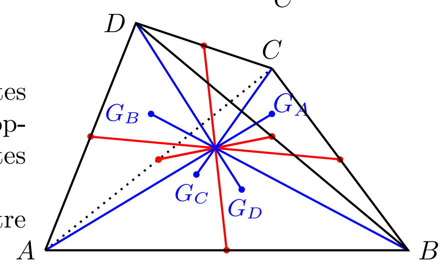
où A', B', C' sont les milieux respectifs de $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$. Les trois médianes sont concourantes en G et



$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A' = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}B' = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}C'.$$

5. Médianes et bimédianes d'un tétraèdre.

Soit tétraèdre un $ABCD$. Les médianes sont les droites joignant l'isobarycentre de chaque face au sommet opposé, les bimédianes joignent les milieux de deux arêtes opposées.
Ces sept droites sont concourantes, en l'isobarycentre du tétraèdre.



Barycentre et sous-espace affine

Proposition 2.2.6: Famille génératrice

1. *Tout sous-espace affine est stable par barycentration.*
2. *Si $\mathscr{S} = (A_i)_{i\in I}$ est un système de point d'un espace affine $\mathscr{E}$ alors l'ensemble des barycentres des $(A_i)_{i\in I}$ est le sous-espace affine $\mathrm{Aff}(\mathscr{S})$ engendré par les points de $\mathscr{S}$.*

* * * * * * * * * *

On dit que $\mathscr{S}$ est une ***famille génératrice*** de $\mathrm{Aff}(\mathscr{S})$

Voir la démonstration (page 70)

Repère barycentrique

Lemme 2.2.7

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points d'un espace affine $\mathscr{E}$. Si pour un $i_0 \in I$ la famille $(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est libre, il en est de même pour tous les $i_0 \in I$.

* * * * * * * * * *

*Une famille de points satisfaisant cette propriété est dite **affinement libre**.*

Voir la démonstration (page 71)

Exemple 2.2.8

1. Deux points forment une famille affinement libre si et seulement si il ne sont pas confondus
2. Trois points forment une famille affinement libre si et seulement si il ne sont pas alignés (*i.e.* n'appartiennent pas à une même droite) ;
3. Quatre points forment une famille affinement libre si et seulement si il ne sont pas coplanaires (*i.e.* n'appartiennent pas à un même plan).

Lemme 2.2.9

1. *Toute sous-famille d'une famille affinement libre est affinement libre.*
2. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.*
3. *Si $\mathscr{E}$ est un espace affine de dimension n alors*
   (a) *toute famille affinement libre possède au plus $n+1$ points*
   (b) *toute famille génératrice possède au moins $n+1$ points.*
   (c) *il existe des familles à la fois affinement libres et génératrices.*

Démonstration. *Laissée en exercice : traduction de résultats d'algèbre linéaire.* □

Définition 2.2.10: Repère barycentrique

*Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Toute famille affinement libre et génératrice est appelée **base/repère affine** ou **repère barycentrique**.*

Ainsi $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est un repère barycentrique de $\mathscr{E}$ si et seulement si $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E. On dit aussi que $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien. Tout point M de $\mathscr{E}$ s'écrit alors

— soit de façon unique dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ avec des **coordonnées cartésiennes** $(x_1, \dots, x_n)$, c'est à dire
$$\overrightarrow{A_0M} = x_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{A_0A_n}$$

— soit comme barycentre de $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ affectés de poids $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ définis à un facteur multiplicatif non nul près, ces poids étant **uniques si on impose une écriture réduite** c'est à dire $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = 1$.

Définition 2.2.11: Coordonnées barycentriques

*Les poids $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont les **coordonnées barycentriques** de M.*

Nota Bene

Dans un espace de dimension n, les repères barycentriques ont $n+1$ points ! Pour avoir un repère cartésien, il faut un point comme origine et n autres points comme extrémités des vecteurs.

* * * * * * * * * *

- Si le point M a pour coordonnées barycentriques $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ dans le repère barycentrique $(A_0, \dots, A_n)$ alors M a pour coordonnées cartésiennes $(\alpha^{-1}\alpha_1, \dots, \alpha^{-1}\alpha_n)$ dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ où $\alpha = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n \neq 0$.

- Réciproquement, si le point M a pour coordonnées cartésiennes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ alors M a pour coordonnées barycentriques $(1-s, x_1, \ldots, x_n)$ dans le repère barycentrique $(A_0, \ldots, A_n)$ où $s = x_1 + \cdots + x_n$.

Remarque 2.2.12

L'avantage des coordonnées barycentriques par rapport aux coordonnées cartésienne est de conserver la symétrie des rôles des points du repère. Avec des coordonnées cartésienne, on doit choisir un des point pour origine de la vectorialisation. Cela évite aussi d'avoir recours aux vecteurs pour positionner les points dans un repère.

Exemples 2.2.13

1. Dans un plan affine, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres :

$$M = \operatorname{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \Big((M = A) \Leftrightarrow (t = 0) \text{ et } (M = B) \Leftrightarrow (t = 1)\Big)$$

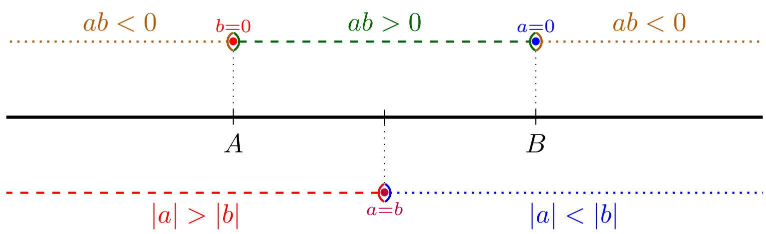
Ainsi si A a pour coordonnées (x_A, y_A) et B pour coordonnées (x_B, y_B) dans un repère cartésien d'un plan, la droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x = (1-t)\, x_A + t\, x_B \\ y = (1-t)\, y_A + t\, y_B \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. On peut préciser la position d'un point M sur (AB) droite affine réelle en fonction des coefficients barycentriques. On peut parler de **segment** $[AB]$ de **demi-droite** $[AB)$ et autres intervalles : $[AB[$, $]AB[$, $]AB)$...
Si $M = \operatorname{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{pmatrix}$, on a les correspondances suivantes :

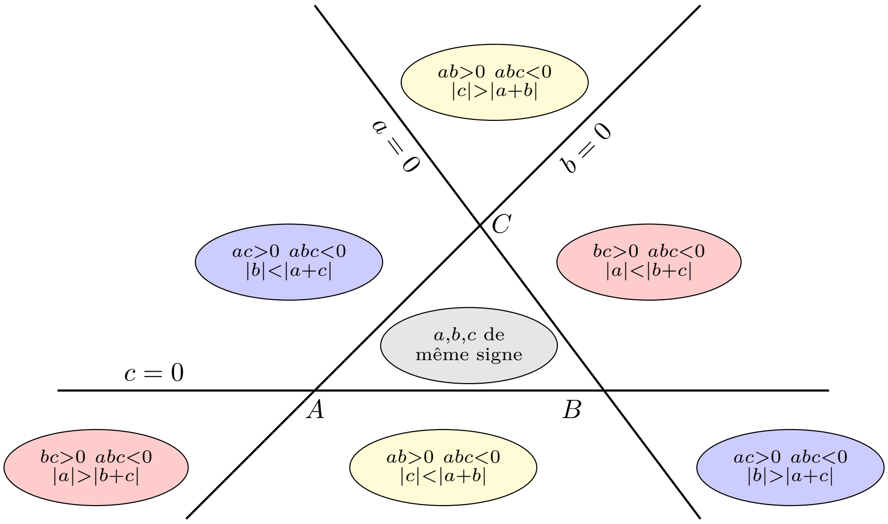
$$\Big(M \in [A, B)\Big) \Leftrightarrow (t \geq 0) \qquad \Big(M \in [A, B]\Big) \Leftrightarrow \Big(t \in [0; 1]\Big) \ldots$$

Si $M = \operatorname{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ a & b \end{pmatrix}$, $a+b \neq 0$, le schéma ci-dessous précise la position de M par rapport à A et B en fonction de a et b :



3. Pour trois points A, B, C non alignés dans un plan affine *réel*, le plan est partitionné en sept domaines bordés par les droites (AB), (BC) et (AC).

$$M = \operatorname{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad a + b + c \neq 0.$$



Exercice 2.2.14

Prouvez (3) en utilisant l'associativité et (2) $\left(\text{poser } H = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ a & b \end{pmatrix}, \quad a+b \neq 0\right)$. Traiter aussi le cas de l'écriture en barycentres réduits : $M = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ t & u & v \end{pmatrix}, \quad t+u+v = 1.$

Mesure algébrique

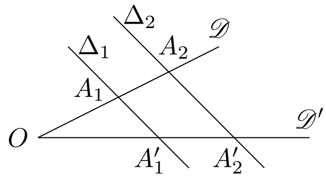
Soit $\mathscr{D}$ une droite affine de direction vectorielle Δ. On suppose donné un vecteur directeur $\vec{\imath}$ de Δ. Pour tout couple (A, B) de points de $\mathscr{D}$, il existe un unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \vec{\imath}$: ce scalaire λ est l'**abscisse** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{\imath})$ de Δ. Il est d'usage de noter $\overline{AB}$ ce scalaire, et de l'appeler la **mesure algébrique** de (A, B). On a les propriétés suivantes :

1. Si on fixe un point $O \in \mathscr{D}$ et si les points A et B ont pour abscisses respectives x_A et x_B dans le repère $(0, \vec{\imath})$ alors $\overline{AB}$ est la différence des abscisses : $\overline{AB} = x_B - x_A$. Cependant **la mesure algébrique ne dépend pas du choix d'une origine sur** $\mathscr{D}$: si A et B ont pour abscisses respectives x'_A et x'_B dans $(O', \vec{\imath})$ alors
$$\overline{AB} = x_B - x_A = x'_B - x'_A.$$
2. La mesure algébrique satisfait la relation de Chasles : si A, B, C sont sur la droite $\mathscr{D}$,
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \qquad \overline{AA} = \overline{BB} = \overline{CC} = 0 \qquad \overline{BA} = -\overline{AB}.$$
3. **La mesure algébrique dépend du vecteur directeur** $\vec{\imath}$ choisi. En revanche, **le rapport de mesures algébriques ne dépend plus du choix de** $\vec{\imath}$: si $\vec{\imath}_1$ et $\vec{\imath}_2$ sont deux vecteurs directeurs de Δ avec $\vec{\imath}_2 = \alpha \cdot \vec{\imath}_1$ $(\alpha \neq 0)$ et si A, B, C, D sont quatre points d'une même droite $\mathscr{D}$ alors
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overline{AB}^{(1)} \cdot \vec{\imath}_1 = \overline{AB}^{(2)} \cdot \vec{\imath}_2 \\ \overrightarrow{CD} = \overline{CD}^{(1)} \cdot \vec{\imath}_1 = \overline{CD}^{(2)} \cdot \vec{\imath}_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{AB}^{(1)} = \alpha \times \overline{AB}^{(2)} \\ \overline{CD}^{(1)} = \alpha \times \overline{CD}^{(2)} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\overline{AB}^{(1)} \times \overline{CD}^{(2)} = \overline{AB}^{(2)} \times \overline{CD}^{(1)}\right)$$
4. Deux droites parallèles ont même direction vectorielle, donc on peut choisir **une même mesure algébrique pour deux droites parallèles**.
5. On peut interpréter la donnée d'une mesure algébrique sur une direction de droite comme une « distance algébrique » sur cette droite, c'est à dire une « distance avec signe indiquant le sens » l'unité de distance et le sens étant donnés par le vecteur $\vec{\imath}$. Le rapport $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ ne dépend pas de $\vec{\imath}$ mais uniquement de la position relative des points A, B, C, D.

Exercice 2.2.15

1. Si Ω, A, B sont alignés, alors $\Omega = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{\Omega B} & \overline{\Omega A} \end{pmatrix}$, ou encore
$$\left(\Omega = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\right) \Longleftrightarrow \left((\Omega = A \text{ et } \beta = 0) \text{ ou } \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}}\right)$$

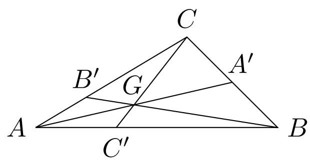
2. **Théorème de Thalès dans un triangle.** Soient deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dans un plan affine, sécantes en un point O. Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes sécantes avec $\mathscr{D}$ en deux points A_1, A_2 respectivement, et sécantes avec $\mathscr{D}'$ en deux points A'_1, A'_2 respectivement.
   (a) Théorème de Thalès : si les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles alors
   $$\frac{\overline{OA'_1}}{\overline{OA'_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}}$$
   (b) Réciproque du théorème de Thalès : si les rapports précédents sont égaux, alors les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.



   (Indication : montrer d'abord la réciproque en exprimant O comme barycentre de (A_1, A_2) et de (A'_1, A'_2) en utilisant (1) ci-dessus, puis montrer la partie directe en introduisant le point d'intersection A''_2 de la parallèle à Δ_1 passant par A_2 avec $\mathscr{D}'$ et en utilisant la partie réciproque.)

3. **Théorème de Ceva.** Soit ABC un triangle (A, B, C non alignés) dans un plan affine, A', B', C' des points respectivement de (BC), (AC) et (BC) distincts de A,B,C. Montrer que les droites (AA') (BB') (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

   (Indication : dans le cas de droites non parallèles, vous inspirer de (4) de l'exemple 2.2.5 (associativité) et de (1) ci-dessus.)



Convexité

Définition 2.2.16: Convexité

Soit $\mathscr{C}$ un sous-ensemble d'un espace affine réel $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{C}$ est convexe si pour tous points A et B de $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est contenu dans $\mathscr{C}$.

* * * * * * * * * *

Rappel : le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B avec les poids $1-t$ et t, $t \in [0;1]$. On convient de considérer $\varnothing$ comme un convexe. Évidemment, $\mathscr{E}$ est convexe.

Proposition 2.2.17: Convexité et barycentres

Un sous-ensemble $\mathscr{C}$ d'un espace affine réel $\mathscr{E}$ est convexe si et seulement si tout barycentre de points de $\mathscr{C}$ affectés de coefficients positifs (ou nuls) est encore dans $\mathscr{C}$.

* * * * * * * * * *

Attention. *Cela ne dit rien si certains coefficients sont négatifs et d'autres positifs ! (le cas où tous les coefficients sont négatifs équivaut aux cas où tous les coefficients sont positifs par homogénéité).*

Voir la démonstration (page 72)

Proposition 2.2.18: Intersection de convexes

1. *Toute intersection de sous-ensembles convexes de $\mathscr{E}$ est convexe.*
2. *Pour tout sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$, il existe un plus petit convexe contenant $\mathscr{A}$.*

Voir la démonstration (page 73)

Remarque 2.2.19

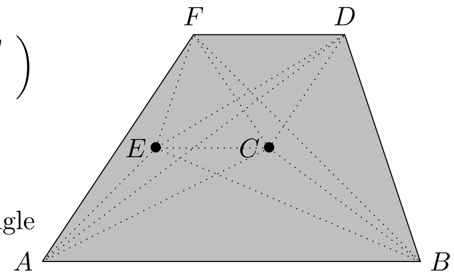
Faire le lien avec la notion de sous-espace affine engendré.

Définition 2.2.20: Enveloppe convexe

On appelle ***enveloppe convexe*** *de $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}$ le plus petit convexe contenant $\mathscr{A}$. On note* $\mathrm{Conv}\ (\mathscr{A})$.

Exemples 2.2.21

1. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (généralisés) de $\mathbb{R}$.
2. Les domaines bordés par un carré, un triangle dans le plan, un tétraèdre, un cube dans l'espace sont convexe, pas leur bord ! Par abus de langage, ces termes désignent à la fois le bord et l'intérieur : le contexte permet de s'y retrouver mais il faut être vigilant.
3. En gris, l'enveloppe convexe des six points A, B, C, D, E, F ci-dessous.
Prenons (A, B, F) comme repère barycentrique : on a



$$C = \mathrm{Bar}\ \begin{pmatrix} A & B & F \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \mathrm{Bar}\ \begin{pmatrix} A & B & F \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \mathrm{Bar}\ \begin{pmatrix} A & B & F \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On voit ici, par exemple que C et E sont dans le triangle $ABF = \mathrm{Conv}\ \{A, B, F\}$ (coefficients positifs).
Attention : il n'y a *unicité de l'écriture barycentrique* (à constante multiplicative près) *que dans un repère barycentrique* ; tout point du convexe gris peut certes s'écrire comme barycentre de A, B, D, F avec des coefficients positifs mais on peut aussi avoir d'autres écritures avec des coefficients positifs et négatifs : par exemple

$$C = \mathrm{Bar}\ \begin{pmatrix} A & B & D & F \\ 4 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\ \begin{pmatrix} A & B & D & F \\ 1 & -6 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

La première écriture nous dit que $C \in \mathrm{Conv}\ \{A, B, D, F\}$, la seconde ne dit rien immédiatement. En revanche comme (A, B, F) est un repère barycentrique, l'écriture

$$D = \mathrm{Bar}\ \begin{pmatrix} A & B & F \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

assure que $D \notin \mathrm{Conv}\ \{A, B, F\}$.

2.3 Applications affines

De la même façon qu'une application linéaire conserve la structure d'espace vectoriel, une application affine conserve la structure d'espace affine.

Définition 2.3.1: Application affine

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines de directions vectorielles respectives E et F (sur $\mathbb{R}$). Une application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est ***affine*** *s'il existe un point O tel que l'application vectorielle $f : E \to F$ définie par*

$$\forall M \in \mathscr{E} \qquad f\big(\overrightarrow{OM}\big) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} \qquad \Big(\text{ou encore } \forall M \in \mathscr{E} \quad \varphi(M) = \varphi(O) + f\big(\overrightarrow{OM}\big)\Big)$$

est linéaire.

Proposition 2.3.2: Indépendance par rapport au choix de l'origine

Dans la définition ci-dessus, si φ est affine, alors f ***ne dépend pas de*** *O.*

* * * * * * * * * *

Nota Bene

L'application f est donc unique et s'appelle alors ***l'application linéaire associée*** *à φ, ou encore* **la partie linéaire** *de φ. On note souvent $\vec{\varphi}$ cette application. On a donc :*

$$\forall (M,N) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E} \qquad \vec{\varphi}\big(\overrightarrow{MN}\big) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(N)}.$$

Démonstration. Soit O' un autre point. Alors en utilisant la relation de Chasles il vient

$$\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = -f\big(\overrightarrow{OO'}\big) + f\big(\overrightarrow{OM}\big)$$

Donc par linéarité de f : $\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = f\big(-\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM}\big) = f\big(\overrightarrow{O'M}\big)$. □

Remarque 2.3.3

Une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est complètement déterminée par la donnée d'un point arbitraire et de son image, et sa partie linéaire.
En vectorialisant $\mathscr{E}$ en O et $\mathscr{F}$ en $\varphi(O)$, on transforme φ en sa partie linéaire :

$$\begin{array}{ccc} M\in\mathscr{E} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathscr{F}\ni\varphi(M) \\ \Big\updownarrow \Big\downarrow \theta_O & & \theta_{\varphi(O)} \Big\downarrow \Big\updownarrow \\ \overrightarrow{OM}\in E & \xrightarrow{\ \vec{\varphi}\ } & F\ni\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \theta_{\varphi(O)} \circ \varphi \circ \theta_O^{-1} \\ \vec{\varphi}\big(\overrightarrow{OM}\big) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}. \end{array}$$

Exemples 2.3.4

1. Si $\mathscr{E} = \mathscr{F} = \mathbb{R}$, une application affine est de la forme $x \mapsto ax + b$, de partie linéaire $x \mapsto ax$.
2. Si $\mathscr{E} = \mathscr{F} = \mathbb{C}$,
   (a) une application affine complexe est de la forme $z \mapsto az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$ sa partie linéaire étant $z \mapsto az$: ce sont des **similitudes directe**) ;
   (b) une application affine réelle est de la forme $z \mapsto az + b\bar{z} + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ sa partie linéaire étant $z \mapsto az + b\bar{z}$.
3. Si $\mathscr{E} = E$ et $\mathscr{F} = F$ sont des espaces vectoriels munis de leur structure affine naturelle, une application affine $\varphi : E \to F$ est de la forme

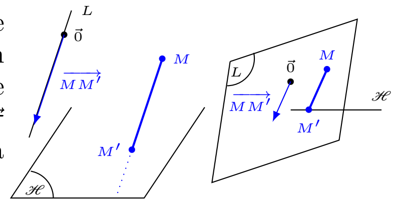
$$\vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u}) = f(\vec{u}) + \vec{v}_0 \qquad \text{où} \quad \vec{v}_0 = \varphi(\vec{0}) \quad \text{et } f \text{ est linéaire.}$$

De plus, f est la partie linéaire de φ, ce qui donne tout son sens à ce terme « partie linéaire ».

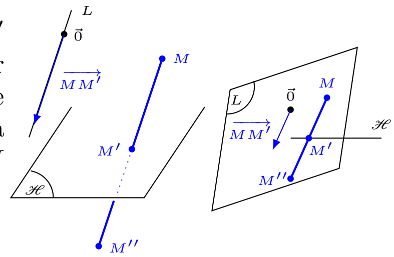
4. Une application constante envoyant $\mathscr{E}$ sur un point est affine de partie linéaire nulle.
5. Si $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ est un système de points pondérés, l'application de Leibniz associée est une application affine de $\mathscr{E}$ dans E muni de sa structure affine naturelle. En particulier, la vectorialisation $\theta_O : \mathscr{E} \to E$, $\theta_O(M) = \overrightarrow{OM}$ est affine.
6. **Translations**. Dans la définition d'espace affine $\mathscr{E}$ de direction vectorielle E, l'application $\tau_{\vec{u}}$, **translation de vecteur** $\vec{u}$
$$M \mapsto \tau(M, \vec{u}) = M + \vec{u}$$
est une bijection affine, de partie linéaire id_E, de réciproque $\tau_{-\vec{u}}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$, $\tau_{\vec{u}} = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\tau_{\vec{u}}$ n'a aucun point fixe. Une composée de translations est une translation.
Réciproquement, une application affine de partie linéaire id_E est une translation (à vérifier !).
7. **Homothéties**. Soit Ω un point de $\mathscr{E}$ et $k \in \mathbb{R}^*$. L'application
$$M \mapsto \varphi(M) = \Omega + k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$
est une bijection affine : c'est l'homothétie (affine) de centre Ω et de rapport k, sa partie linéaire est homothétie (vectorielle) $k \cdot \mathrm{id}_E$ de rapport k , sa réciproque est l'homothétie (affine) de centre Ω et de rapport $1/k$. Si $k = 1$, tout point est fixe : $\varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$; cette homothétie ne dépend pas de Ω. Si $k \neq 1$, φ a un unique point fixe : Ω.
Attention : la composée de deux homothéties de rapports inverse est une translation !

> ***Nota Bene***
> Le théorème de Thalès dans un triangle est simplement la traduction du caractère affine d'une homothétie.

Remarque : le cas $k = 0$ est à part, on ne le considère pas comme une homothétie. En effet, dans ce cas, ce n'est plus une bijection, c'est l'application constante envoyant $\mathscr{E}$ sur Ω.
8. **Projections**. Soient $\mathscr{H}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, de direction H et L un supplémentaire de L de E ($E = H \oplus L$). À tout point M de $\mathscr{E}$ on associe l'unique point M' de $\mathscr{H}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in L$. L'application $\pi : M \mapsto M'$ est la **projection** sur $\mathscr{H}$ de direction L. Elle est affine et la partie linéaire est la projection vectorielle $\vec{\pi}$ sur H de direction L. Une application affine satisfaisant la relation $\pi \circ \pi = \pi$ est une projection.



9. **Symétries**. Soit π la projection sur $\mathscr{H}$ de direction L comme dans le point précédent.
L'application σ qui à M associe l'unique point $\sigma(M) = M''$ tel que $M' = \pi(M)$ est milieu de $[MM'']$ est symétrie par rapport à $\mathscr{H}$ de direction L. C'est une application affine bijective et même **involutive**, c'est à dire $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Sa partie linéaire est la symétrie vectorielle $\vec{\sigma}$ par rapport à H de direction L : $\vec{\sigma} = 2\vec{\pi} - \mathrm{id}_E$.
Une application affine involutive est une symétrie.



Injectivité - surjectivité - composition - groupe affine

La remarque 2.3.3 nous donne immédiatement les résultats suivants (laissés en exercice).
— Une application affine est injective/surjective/bijective si et seulement si sa partie linéaire est injective/surjective/bijective.

En effet avec les notations de la remarque 2.3.3, φ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\vec{\varphi} = \theta_{\varphi(O)} \circ \varphi \circ \theta_O^{-1}$ est bijective.

— La réciproque d'une fonction affine bijective est affine. On parle d'**isomorphisme affine**.

En effet, si φ est bijective alors $\vec{\varphi}^{-1} = \theta_O \circ \varphi^{-1} \circ \theta_{\varphi(O)}^{-1}$ est la partie linéaire de sa réciproque φ^{-1}.

— La composée de deux applications affines est affine de partie linéaire la composée des parties linéaires.

En effet, la composée $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ d'applications affines $\mathscr{E}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{E}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathscr{E}_3$ a pour partie linéaire

$$\vec{\psi} = \theta_{\psi(O)} \circ \psi \circ \theta_O^{-1} = \left(\theta_{\varphi_2(\varphi_1(O))} \circ \varphi_2 \circ \theta_{\varphi_1(O)}^{-1}\right) \circ \left(\theta_{\varphi_1(O)} \circ \varphi_1 \circ \theta_O^{-1}\right) = \vec{\varphi}_2 \circ \vec{\varphi}_1.$$

— L'ensemble des bijections affines de $\mathscr{E}$ dans lui-même forme un groupe pour la composition noté $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$: c'est le **groupe affine** de $\mathscr{E}$. Ses éléments sont des **transformations affines**.

Proposition 2.3.5: Points fixes d'une transformation affine

1. *Soit O un point fixé de $\mathscr{E}$. Toute transformation affine $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ s'écrit de façon unique sous les deux formes*

$$\varphi = \tau_{\vec{u}} \circ \psi_O \qquad \text{et} \qquad \varphi = \psi_O \circ \tau_{\vec{v}}$$

où $\tau_{\vec{u}}$ et $\tau_{\vec{v}}$ sont des translations et ψ_O une transformation affine qui fixe O.

2. *Soit $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ transformation affine ayant un point fixe A. Soit $B \in \mathscr{E}$ et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Alors B est un point fixe de $\tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}$.*
3. *Soit $\psi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ transformation affine. Soit τ la translation de vecteur $\vec{u}$. Alors $\psi \circ \tau \circ \psi^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{\psi}(\vec{u})$.*

* * * * * * * * * *

Une composée du type $g \circ f \circ g^{-1}$ s'appelle conjugaison de f par g. Les translations sont stables par conjugaison.

Voir la démonstration (page 74)

Effet sur les barycentres

La conservation des combinaisons linéaires par les application linéaires induit la conservation des barycentres par les applications affines.

Théorème 2.3.6: Conservation du barycentre

1. *Soit $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Pour tout système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$ de $\mathscr{E}$ de masse totale $\alpha \neq 0$, l'image $\varphi(G)$ du barycentre G de ce système est le barycentre de $(\varphi(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$:*

$$\left(G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow \left(\varphi(G) = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} \varphi(A_1) & \cdots & \varphi(A_p) \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix}\right)$$

On dit que φ conserve les barycentres.

2. *Réciproquement une application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ qui conserve les barycentres est affine.*

Voir la démonstration (page 75)

Les conséquences de ce théorème sont nombreuses. Voici quelques unes d'entre elles :

Corollaire 2.3.7: Propriétés des applications et transformations affines

1. *Pour les applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$:*
   (a) *l'image d'un sous-espace affine est un sous-espace affine ;*
   (b) *l'image réciproque d'un sous-espace affine (si elle n'est pas vide) est un sous-espace affine ;*
   (c) *Une application affine conserve l'alignement, la coplanarité etc. ;*
   (d) *Une application affine réelle envoie un segment sur un segment (éventuellement réduit à un point).*
2. *Pour les transformations affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$:*
   (a) *l'image d'une droite est une droite, d'un plan est un plan etc. ;*
   (b) *deux droites sécantes sont envoyées sur deux droites sécantes*
   (c) *elles conservent le parallélisme et le concours ;*
   (d) *conserve les repère barycentriques ;*
   (e) *une transformation affine fixant $n+1$ points affinement indépendants d'un espace de dimension n est l'identité ;*
   (f) *Une transformation affine réelle envoie un segment sur un segment, une demi-droite sur une demi-droite, un demi-plan sur un demi-plan etc. ;*

Caractère affine des projections - Théorème de Thalès

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E, $\mathscr{H}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction H et L un supplémentaire de H. Soit Pour tout $M \in \mathscr{E}$, on note $\pi(M)$ son **projeté** sur $\mathscr{H}$ dans la direction de L, c'est à dire le point d'intersection de $\mathscr{H}$ avec l'unique sous-espace affine $\mathscr{L}_M$ passant par M de direction L. L'application π est la **projection** sur $\mathscr{H}$ de direction L.

Proposition 2.3.8: Caractère affine des projections

La projection $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{H} \subset \mathscr{E}$ de direction L est une application affine.

Voir la démonstration (page 76)

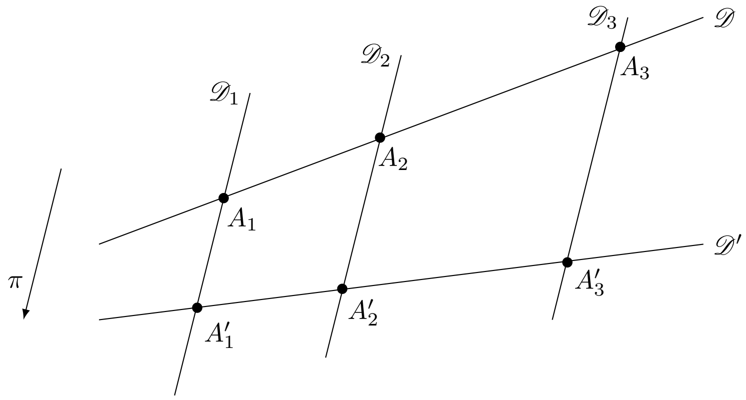
Corollaire 2.3.9: Théorème de Thalès dans le plan

Soient trois droites (strictement) parallèles $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ d'un plan affine intersectant deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ respectivement en trois points A_1, A_2, A_3 sur $\mathscr{D}$ et trois points A'_1, A'_2, A'_3 sur $\mathscr{D}'$. Alors on a égalité des rapports :

$$(*) \qquad \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A'_1A'_3}}{\overline{A'_1A'_2}}$$

Réciproquement si deux droites (strictement) parallèles $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ d'un plan affine intersectant deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ respectivement en A_1, A_2 sur $\mathscr{D}$ et A'_1, A'_2 sur $\mathscr{D}'$ et si A_3 sur $\mathscr{D}$ et A'_3 sur $\mathscr{D}'$ satisfont $(*)$, alors la droite $(A_3A'_3)$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Démonstration. *Ce théorème traduit le caractère affine des projections : on considère la projection sur $\mathscr{D}'$ parallèlement à $\mathscr{D}_1$.*
Sens direct. *La conservation du barycentre donne immédiatement $(*)$.*
Réciproquement. *Supposons $(*)$ satisfaite. D'après le sens direct, la projection π qui envoie A_1 sur A'_1 et A_2 sur A'_2 envoie A_3 sur un point A''_3, tel que $(A_3A''_3)$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$, et la relation $(*)$ est également satisfaite en remplaçant A'_3 par A''_3. On en déduit que $\overline{A'_1A'_3} = \overline{A'_1A''_3}$ donc $A'_3 = A''_3$.*


$\mathscr{D}_3$
$\mathscr{D}$
$\mathscr{D}_2$
A_3
$\mathscr{D}_1$
A_2
A_1
$\mathscr{D}'$
A'_3
π
A'_2
A'_1

□

Nota Bene
Quelques transformations affines d'un espace affine $\mathscr{E}$ de direction vectorielle E :

1. Les translations :

   elles sont déterminée par la donnée d'un vecteur ;

   leur partie linéaire est id_E ;

   elles n'ont pas de point fixe (sauf $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$) ;

   elles forment un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ stable par conjugaison (on dit *sous-groupe distingué*, ou *normal*).
2. Les homothéties (de rapport non nul k) :

   elles ont un unique point fixe (sauf $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$)

   leur partie linéaire est $k \cdot \mathrm{id}_E$;

   elles ne forment pas un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$: la composée de deux homothéties de rapports inverses et de centres différents est une translation, pas une homothétie.

   en revanche, étant donné un point Ω, les homothéties de centre Ω forment un sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ qui n'est pas stable par conjugaison : la conjugaison change le centre ;

   les homothéties-translations* (réunies dans un même ensemble) forment un sous-groupe stable par conjugaison : ce sont les transformations affines qui envoient toute droite sur une droite parallèle.
3. Les symétries :

   l'ensemble des points fixes est un sous-espace affine non vide (symétrie centrale pour un unique point fixe, axiale pour une droite de points fixes, symétrie hyperplane pour un sous-espace de points fixes de codimension 1) ;

   elles sont involutives (*i.e.* leur propre inverse) ;

   elles ne forment pas un groupe : la composée de deux symétries n'est en général pas une symétrie ;

   leur partie linéaire est une symétrie vectorielle.
4. Les symétries glissées :

   ce sont les composées de symétries et de translations ;

   elles n'ont pas de point fixe mais un unique sous-espace affine non trivial globalement invariant ;

   leur partie linéaire est une symétrie vectorielle.
5. Les affinités et transvections.

---

*. Attention : certains auteurs appellent dilatation une transformation qui est soit une homothétie soit une translation.

Les démonstrations du chapitre 2

Proposition: Caractérisation d'un sous-espace affine

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $\Omega \in \mathscr{E}$,*
$$\mathscr{F} = \{\Omega + \vec{v} : \vec{v} \in F\}$$
est l'unique sous-espace affine de direction F et passant par Ω.
2. *Réciproquement, un sous-ensemble non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ si et seulement si pour n'importe quel point Ω de $\mathscr{F}$,*
$$F = \{\overrightarrow{\Omega M} : M \in \mathscr{F}\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
(F est le vectorialisé de $\mathscr{F}$ en Ω et c'est la direction vectorielle de $\mathscr{F}$).
3. *$\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ si et seulement si $F = \{\overrightarrow{MN} : (M, N) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus F est la direction vectorielle de $\mathscr{F}$.*

Démonstration. *Retour page 49*

1. *Fixons $\Omega \in \mathscr{E}$.*
   - ⋆ *Soient $M = \Omega + \vec{u}$, $N = \Omega + \vec{v}$ ($\vec{u}, \vec{v} \in F$) deux éléments de $\mathscr{F}$. Alors*
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M} = (\Omega + \vec{v}) - (\Omega + \vec{u}) = \vec{v} - \vec{u} \in F.$$
   - ⋆ *Soient $M = \Omega + \vec{u} \in \mathscr{F}$ et $\vec{v}$. Alors $N = \Omega + (\vec{u} + \vec{v}) \in F$ est bien l'unique point satisfaisant $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$.*
2. *Supposons que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de direction vectorielle F et fixons $\Omega \in \mathscr{F}$. Par la définition 2.1.1, pour tout $M \in \mathscr{F}$, $\overrightarrow{\Omega M} \in F$ et pour tout $\vec{v} \in F$ le point $M = \Omega + \vec{v} = \tau(M, \vec{v})$ satisfait $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{v}$. Donc*
$$F = \{\overrightarrow{\Omega M} : M \in \mathscr{F}\}.$$
Réciproquement, supposons que $F = \{\overrightarrow{\Omega M} : M \in \mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Alors l'opération $\tau : \mathscr{E} \times E \to \mathscr{E}$, $(M, \vec{v}) \mapsto \tau(M, \vec{v}) = M + \vec{v}$ restreinte à $\mathscr{F} \times F$ confère à $\mathscr{F}$ une structure d'espace affine de direction F :
   - *$\tau(\mathscr{F} \times F) \subset \mathscr{F}$: si $(M, \vec{v}) \in \mathscr{F} \times F$, notons $P = \tau(M, \vec{v}) = M + \vec{v}$, de sorte que $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$. On sait qu'il existe $N \in \mathscr{F}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\Omega N}$ donc $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{\Omega N}$. D'après la relation de Chasles et puisque F est un espace vectoriel :*
$$\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega N} \in F \quad \text{donc} \quad P \in \mathscr{F}.$$
   - *$(EA1)$ est satisfaite dans $\mathscr{E} \times E$ donc a fortiori dans $\mathscr{F} \times F$*

- $(EA2)$: *si* $(M, N) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F}$ *alors d'après la relation de Chasles et puisque* F *est un espace vectoriel* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M} \in F$ *satisfait bien*

$$M + \left(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}\right) = M + \overrightarrow{MN} = N.$$

En particulier $\tau(\mathscr{F} \times F) = \mathscr{F}$.

De plus, si Ω' *est un autre points de* $\mathscr{F}$, *comme* F *est un espace vectoriel, la relation de Chasles donne :*

$$\forall M \in \mathscr{F} \qquad \overrightarrow{\Omega' M} = \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega \Omega'} \in F$$

Ce qui prouve (1).

3. *Soit* F *est un sous-espace vectoriel de* E *et* $A \in \mathscr{E}$. *On pose* $\mathscr{F} = \{M \in \mathscr{E} : \overrightarrow{AM} \in F\}$. *On sait que pour tout* $\vec{v} \in E$, *il existe un unique point* $M \in \mathscr{E}$ *tel que* $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$. *En appliquant cela à* $\vec{v} \in F$ *il vient*

$$F = \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathscr{F}\}$$

D'après (1), $\mathscr{F}$ *est un sous-espace affine de direction* F *et contenant* A. *Réciproquement, soit* $\mathscr{F}$ *est sous-espace affine de direction* F *et contenant* A. *D'après (1),* $F = \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathscr{F}\}$ *donc on a bien* $\mathscr{F} = \{M \in \mathscr{E} : \overrightarrow{AM} \in F\}$.

$\square$

Proposition: Opérations sur les barycentres

1. *Reindexation : le barycentre ne dépend pas de la façon d'indexer le système de points pondérés* $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$;
2. *Ajout/suppression de points : on ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés* $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ *si on ajoute ou retire un point avec un coefficient nul ;*
3. *Homogénéité : on ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés* $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ *si on multiplie tous les poids par par un même scalaire non nul ;*

$$\text{si } \lambda \neq 0 \quad \text{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix} = \text{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \cdots & \lambda\alpha_p \end{pmatrix}$$

4. *Associativité : soit* $G = \text{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in I}$, $\left(\alpha = \sum_{i\in I}\alpha_i \neq 0\right)$. *Soit* $K \subset I$ *tel que* $(A_i, \alpha_i)_{i\in K}$ *a une masse totale* $\beta = \sum_{i\in K}\alpha_i$ *non nulle, et soit* $H = \text{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in K}$ *le « barycentre partiel ». Alors*
$$G = \text{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in I} = \text{Bar}\ \Big((A_i, \alpha_i)_{i\in I\setminus K}, (H, \beta)\Big).$$
En d'autre termes, on peut remplacer les $(A_i, \alpha_i)_{i\in K}$ *par leur barycentre affecté de la somme de leurs poids.*

Démonstration. Retour page 53
Dire que G *est barycentre de* $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ $(\sum_{i\in I}\alpha_i = \alpha \neq 0)$ *équivaut à dire que*
$$\sum_{i\in I}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$
Les résultats annoncés sont donc des conséquences de propriétés des combinaisons linéaires, immédiates pour au moins les trois premières (commutativité, ajout du vecteur nul, multiplication par un scalaire non nul). Écrivons simplement l'associativité :
$$\vec{0} = \sum_{i\in I}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i\in I\setminus K}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i\in K}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$$
Or d'après la formule de polarisation, si $H = \text{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in K}$ $(\sum_{i\in K}\alpha_i = \beta \neq 0$
$$\forall M \in \mathscr{E} \qquad \sum_{i\in K}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \beta\overrightarrow{MH} \qquad \text{donc} \qquad \sum_{i\in K}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \beta\overrightarrow{GH}$$
d'où
$$\vec{0} = \sum_{i\in I}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i\in I\setminus K}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} + \beta\overrightarrow{GH}$$
c'est à dire $G = \text{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in I} = \text{Bar}\ \Big((A_i, \alpha_i)_{i\in I\setminus K}, (H, \beta)\Big).$ □

Proposition: Famille génératrice

1. *Tout sous-espace affine est stable par barycentration.*
2. *Si $\mathscr{S} = (A_i)_{i\in I}$ est un système de point d'un espace affine $\mathscr{E}$ alors l'ensemble des barycentres des $(A_i)_{i\in I}$ est le sous-espace affine $\mathrm{Aff}(\mathscr{S})$ engendré par les points de $\mathscr{S}$.*

* * * * * * * * * *

On dit que $\mathscr{S}$ est une ***famille génératrice*** *de* $\mathrm{Aff}(\mathscr{S})$

Démonstration. *Retour page 54*

1. *Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de direction F et soit $\Omega \in \mathscr{F}$. si $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$ est un système de points pondéré de $\mathscr{F}$ de masse totale α non nulle, alors le barycentre G satisfait :*

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i\in I}\alpha_i\overrightarrow{\Omega A_i} \in F \qquad \text{donc} \quad G \in \mathscr{F}.$$

2. *On sait que $\mathrm{Aff}(\mathscr{S})$ est un sous-espace affine (c'est le plus petit contenant $\mathscr{S}$, c'est à dire l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\mathscr{S}$) donc d'après 1), il est stable par barycentration. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble de tous les barycentres des points de $\mathscr{S}$. On a donc $\mathscr{F} \subset \mathrm{Aff}(\mathscr{S})$. Montrons que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine (auquel cas on aura l'inclusion dans l'autre sens $\mathrm{Aff}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{F}$). Fixons $\Omega \in \mathscr{F}$. On montre que $F = \{\overrightarrow{\Omega M} : M \in \mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est à dire qu'il est stable par combinaisons linéaires, ce qui fait que $\mathscr{F} = \Omega + F$ est le sous-espace affine contenant Ω et de direction F.*
   - *$\vec{0} = \overrightarrow{\Omega\Omega} \in F$ donc F n'est pas vide.*
   - ***Stabilité par produit par un scalaire****.*
     Soit $\vec{u} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\vec{v} = \lambda\vec{u} \in F$.
     Par définition, il existe $M \in \mathscr{F}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega M}$. Soit N tel que $\overrightarrow{\Omega N} = \vec{v} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$, ou de façon équivalente

     $$\lambda\overrightarrow{NM} + (1-\lambda)\overrightarrow{N\Omega} = \vec{0} \quad \text{c'est à dire} \quad N = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} M & \Omega \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

     D'autre part, comme Ω et M sont dans $\mathscr{F}$ ils s'expriment comme barycentres de points de $\mathscr{S} = (A_i)_{i\in I}$ c'est à dire : il existe un ensemble fini $J \subset I$ et des coefficients $(\alpha_i)_{i\in J}$ et $(\beta)_{i\in J}$ dont les sommes respectives sommes $\alpha = \sum_{i\in J}\alpha_i$ et $\beta = \sum_{i\in J}\beta$ sont égales à 1 tels que :

     $$M = \mathrm{Bar}\ (A_i, \alpha_i)_{i\in J} \quad \text{et} \quad \Omega = \mathrm{Bar}\ (A_i, \beta_i)_{i\in J}.$$

     (Remarque : on aurait dû prendre deux sous-ensembles finis J_1 et J_2 de I, l'un pour M l'autre pour Ω mais quitte affecter certains points du coefficient 0, on peut remplacer J_1 et J_2 par $J = J_1 \cup J_2$ et se ramener à d'un même ensemble J). Mais alors, par associativité du barycentre,

     $$N = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} M & \Omega \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{Bar}\ \Big(A_i, \lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i\Big)_{i\in J}$$

     d'où $N \in \mathscr{F}$ et donc $\lambda\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega N} \in F$.
   - ***Stabilité par somme****. Soit $(M, N) \in \mathscr{F}\times\mathscr{F}$ c'est à dire $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}) \in F \times F$. Soit G l'isobarycentre de M et N . Alors $G \in \mathscr{F}$ (par associativité du barycentre, même démonstration que ci-dessus) donc $\overrightarrow{\Omega G} \in F$, donc d'après ce que vient de voir, $2\overrightarrow{\Omega G} = \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{\Omega N} \in F$.*

□

Lemme

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points d'un espace affine $\mathscr{E}$. Si pour un $i_0 \in I$ la famille $(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est libre, il en est de même pour tous les $i_0 \in I$.

* * * * * * * * * *

Une famille de points satisfaisant cette propriété est dite ***affinement libre****.*

Démonstration. *Retour page 54*
Supposons $(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ libre. Soit $i_1 \in I$ et considérons une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i\in I\setminus\{i_1\}} \lambda_i \overrightarrow{A_{i_1}A_i} = \overrightarrow{0}.$$

D'après la relation de Chasles :

$$\sum_{i\in I\setminus\{i_1\}} \lambda_i \left(\overrightarrow{A_{i_1}A_{i_0}} + \overrightarrow{A_{i_0}A_i}\right) = \overrightarrow{0}$$

c'est à dire

$$\sum_{i\in I\setminus\{i_1\}} \lambda_i \overrightarrow{A_{i_0}A_i} - \Big(\sum_{i\in I\setminus\{i_1\}} \lambda_i\Big) \overrightarrow{A_{i_0}A_{i_1}} = \overrightarrow{0}$$

ou encore en posant $\lambda_{i_1} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_1\}} \lambda_i$

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{A_{i_0}A_i} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i \overrightarrow{A_{i_0}A_i} = \overrightarrow{0}.$$

Comme la famille $(\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ libre, on a :

$$\lambda_i = 0 \quad \text{pour tout } i \in I\setminus\{i_0\} \quad \text{et} \quad \lambda_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i = 0.$$

Donc tous les coefficients sont nuls. Ce qui nous dit que la famille $(\overrightarrow{A_{i_1}A_i})_{i\in I\setminus\{i_1\}}$ est également libre. $\square$

Proposition: Convexité et barycentres

Un sous-ensemble $\mathscr{C}$ d'un espace affine réel *$\mathscr{E}$ est convexe si et seulement si tout barycentre de points de $\mathscr{C}$ affectés de coefficients positifs (ou nuls) est encore dans $\mathscr{C}$.*

* * * * * * * * * *

Attention. *Cela ne dit rien si certains coefficients sont négatifs et d'autres positifs ! (le cas où tous les coefficients sont négatifs équivaut aux cas où tous les coefficients sont positifs par homogénéité).*

Démonstration. *Retour page 58*
Il est clair qu'un sous-ensemble $\mathscr{C}$ pour lequel tout barycentre de points de $\mathscr{C}$ affectés de coefficients positifs (ou nuls) est encore dans $\mathscr{C}$ est nécessairement convexe : il suffit d'appliquer cette propriété à deux points.
Réciproquement, si $\mathscr{C}$ est convexe, on procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : « tout barycentre d'au plus n points de $\mathscr{C}$ affectés de coefficients positifs (ou nuls) est encore dans $\mathscr{C}$ ». Évidemment $\mathscr{P}_1$ est vraie, $\mathscr{P}_2$ également par définition de la convexité. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie. Soit un système $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ de $n+1$ points pondérés ***positifs ou nuls*** *tels que $\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \neq 0$, et G son barycentre. On a deux cas :*

- *ou bien un des coefficients est nul. Quitte à réindexer on peut supposer que $\alpha_{n+1} = 0$ auquel cas $G = \mathrm{Bar}\ (A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$. On applique $\mathscr{P}_n$: $G \in \mathscr{C}$.*
- *ou bien aucun coefficient n'est nul : dans ce cas, on déduit de la positivité des coefficients que $\alpha_{n+1} > 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha - \alpha_{n+1} > 0$. On pose $H = \mathrm{Bar}\ (A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$. En utilisant $\mathscr{P}_n$ $H \in \mathscr{C}$ et grâce à l'associativité et à $\mathscr{P}_2$*

$$G = \mathrm{Bar} \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n & A_{n+1} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{Bar} \begin{pmatrix} H & A_{n+1} \\ \alpha - \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathscr{C} \quad \text{d'où} \quad \mathscr{P}_{n+1}$$

Par récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Proposition: Intersection de convexes

1. *Toute intersection de sous-ensembles convexes de $\mathscr{E}$ est convexe.*
2. *Pour tout sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$, il existe un plus petit convexe contenant $\mathscr{A}$.*

Démonstration. Retour page 59

1. Soit $(\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles convexes de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{C} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i$ n'est pas vide (le cas vide étant réglé) pour tous $A, B \in \mathscr{C}$. Alors on a
$$\forall i \in I \qquad [AB] \subset \mathscr{C}_i$$
d'où $[AB] \subset \mathscr{C}$. Ainsi, $\mathscr{C}$ est convexe.
2. Remarquons qu'il existe au moins un convexe contenant $\mathscr{A}$: $\mathscr{E}$ lui-même. L'intersection de tous les convexes qui contiennent $\mathscr{A}$ est évidemment le plus petit convexe contenant $\mathscr{A}$.

$\square$

Proposition: Points fixes d'une transformation affine

1. *Soit O un point fixé de $\mathscr{E}$. Toute transformation affine $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ s'écrit de façon unique sous les deux formes*
$$\varphi = \tau_{\vec{u}} \circ \psi_O \qquad \text{et} \qquad \varphi = \psi_O \circ \tau_{\vec{v}}$$
où $\tau_{\vec{u}}$ et $\tau_{\vec{v}}$ sont des translations et ψ_O fixe O.
2. *Soit $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ transformation affine ayant un point fixe A. Soit $B \in \mathscr{E}$ et τ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Alors B est un point fixe de $\tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}$.*
3. *Soit $\psi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ transformation affine. Soit τ la translation de vecteur $\vec{u}$. Alors $\psi \circ \tau \circ \psi^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{\psi}(\vec{u})$.*

* * * * * * * * * *

Une composée du type $g \circ f \circ g^{-1}$ s'appelle conjugaison de f par g. Les translations sont stables par conjugaison.

Démonstration. *Retour page 62*

1. ***Existence***. *On considère le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{O\varphi(O)}$, $\tau_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, et $\psi_O = \tau_{\vec{u}}^{-1} \circ \varphi$. Alors comme $\varphi(O) = O + \vec{u}$, on a*
$$\psi_O(O) = \tau_{\vec{u}}^{-1} \circ \varphi(O) = \varphi(O) - \vec{u} = O$$
Le même raisonnement appliqué à φ^{-1} nous donne l'autre écriture $\varphi = \psi'_O \circ \tau_{\vec{v}}$ où $\tau_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{\varphi^{-1}(O)O}$ et ψ'_O fixe O.
Unicité. *Supposons que τ est une autre translation et ψ une autre transformation affine fixant O telles que*
$$\varphi = \tau_{\vec{u}} \circ \psi_O = \tau \circ \psi.$$
Alors $\psi_O \circ \psi^{-1} = \tau_{\vec{u}}^{-1} \circ \tau$ est une translation fixant O,donc $\tau_{\vec{u}}^{-1} \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Ainsi $\tau = \tau_{\vec{u}}$ et $\psi = \psi_O$. De même, on a unicité de $\tau_{\vec{v}}$ et ψ'_O. Reste à voir que $\psi_O = \psi'_O$. Cela vient du fait que φ, ψ_O et ψ'_O ont même partie linéaire :
$$\forall M \in \mathscr{E} \qquad \overrightarrow{O\psi_O(M)} = \overrightarrow{\psi_O(O)\psi_O(M)} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi_O(M)} = \overrightarrow{\psi'_O(O)\psi_O(M)} = \overrightarrow{O\psi_O(M)}$$
donc $\psi_O = \psi'_O$.
2. *Évident : si τ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$*
$$\tau \circ \varphi \circ \tau^{-1}(B) = \tau \circ \varphi(A) = \tau(A) = B.$$
3. *Notons $\tilde{\tau} = \psi \circ \tau \circ \psi^{-1}$ et $\vec{v} = \vec{\psi}(\vec{u})$. Soit $M \in \mathscr{E}$ un point arbitraire. Notons $N = \psi^{-1}(M)$ on a :*
$$\overrightarrow{M\tilde{\tau}(M)} = \overrightarrow{\psi(N)\psi\big(\tau(N)\big)} = \vec{\psi}\Big(\overrightarrow{N\tau(N)}\Big) = \vec{\psi}(\vec{u}) = \vec{v}.$$
Ce vecteur $\vec{v} = \vec{\psi}(\vec{u})$ ne dépend pas du point M donc $\tilde{\tau}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$.

□

Théorème: Conservation du barycentre

1. *Soit $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Pour tout système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ de $\mathscr{E}$ de masse totale $\alpha \neq 0$, l'image $\varphi(G)$ du barycentre G de ce système est le barycentre de $(\varphi(A_i), \alpha_i)_{1\leq i\leq p}$:*

$$\left(G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow \left(\varphi(G) = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} \varphi(A_1) & \cdots & \varphi(A_p) \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix}\right)$$

   On dit que φ conserve les barycentres.
2. *Réciproquement une application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ qui conserve les barycentres est affine.*

<u>Démonstration.</u> Retour page 62

Par associativité du barycentre, il suffit de montrer cette proposition dans le cas de deux points pondérés.

1. *Si φ est affine : soient A et B deux points de $\mathscr{E}$ et t un scalaire. Soit $G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1-t & t \end{pmatrix}$,* i.e. $(1-t)\overrightarrow{GA} + t\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. *Alors par linéarité*

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{\varphi}(\vec{0}) = \vec{\varphi}\big((1-t)\overrightarrow{GA} + t\overrightarrow{GB}\big) &= (1-t)\vec{\varphi}(\overrightarrow{GA}) + t\vec{\varphi}(\overrightarrow{GB}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{\varphi(G)\varphi(A)} + t\overrightarrow{\varphi(G)\varphi(B)}.\end{aligned}$$

   donc $\varphi(G) = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} \varphi(A) & \varphi(B) \\ 1-t & t \end{pmatrix}$.
2. *Réciproquement : on vectorialise en un point O arbitraire. On considère l'application vectorielle $f : E \to F$ définie pour tout $M \in \mathscr{E}$ par*

$$f\big(\overrightarrow{OM}\big) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} \qquad \text{(on remarque que } f(\vec{0}) = \vec{0}).$$

   On montre que f est linéaire en commencer par le produit par un scalaire.
   - ***Produit par un scalaire**. Soient $\vec{u}$ un vecteur et α un scalaire. Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, on a de façon évidente $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$. Sinon, soient A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{OB}$. Alors $\alpha\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ c'est à dire $\alpha\overrightarrow{BA} + (1-\alpha)\overrightarrow{BO} = \vec{0}$ et donc*

$$B = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & O \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad \varphi(B) = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} \varphi(A) & \varphi(O) \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

     Ainsi $f(\alpha\vec{u}) = f\big(\overrightarrow{OB}\big) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(B)} = \alpha\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)} + (1-\alpha)\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(O)} = \alpha f\big(\overrightarrow{OA}\big) = \alpha f(\vec{u})$.
   - ***Somme des vecteurs**. Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ dans E. Soient A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et G l'isobarycentre de A et B. Alors $\varphi(G)$ est l'isobarycentre de $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ et*

$$f\big(\vec{u}+\vec{v}\big) = f\big(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\big) = f\big(2\overrightarrow{OG}\big) = 2\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(G)} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(2)} = f\big(\vec{u}\big) + f\big(\vec{v}\big).$$

□

Proposition 2.3.10: Caractère affine des projections

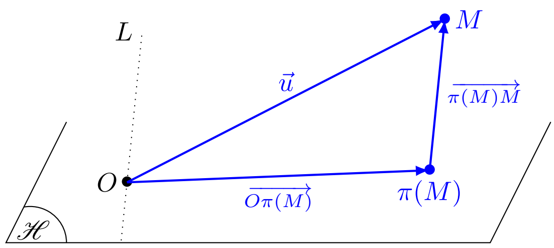
La projection $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{H} \subset \mathscr{E}$ de direction L est une application affine.

Démonstration. *Retour page 63*

Soit $O \in \mathscr{H}$. C'est un point fixe de π. On vectorialise en O : on montre que l'application $E \to H$, $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{O\pi(M)}$ est linéaire.

Pour tout vecteur $\vec{u} \in E$, il existe $M \in \mathscr{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. La relation de Chasles donne :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\pi(M)} + \overrightarrow{\pi(M)M}.$$



Or par définition de π et choix de O,

$$(\pi(M) \in \mathscr{H}) \iff (\overrightarrow{O\pi(M)} \in H \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\pi(M)M} \in L).$$

Donc si p désigne la projection vectorielle de E sur H de direction L, alors $\overrightarrow{O\pi(M)} = p(\vec{u})$ Or p est linéaire donc π est affine de direction vectorielle $\vec{\pi} = p$. □

Chapitre 3

Géométrie affine euclidienne

Dans ce chapitre, on enrichit la structure d'espace affine réel en définissant des notions dites **"métriques et trigonométriques"**, en d'autres termes de **distance** (euclidienne) et d'**angle**.

Du fait que les scalaires sont des nombres réels ($\mathbb{R}$ est un corps complet qui est **totalement ordonné**), on peut en effet parler de distance entre deux nombres réels (grâce à la valeur absolue, la distance entre a et b est $|b-a|$) ; cela permet de définir ensuite la notion de norme de vecteur (généralisant la valeur absolue) et de distance entre deux points. Pour avoir une notion d'angle, et donc d'orthogonalité, on a besoin de normes très particulières : celles définies par un **produit scalaire**.

On se placera dans toute la suite dans un espace vectoriel réel de dimension finie.

On supposera connues les notions de norme, de produit scalaire, d'orthogonalité, de base orthonormale, de sous-espace orthogonal, de supplémentaire orthogonal, d'endomorphisme orthogonal... dans un espace vectoriel euclidien.

3.1 Espace affine euclidien - Isométrie

Définition 3.1.1: Produit scalaire, espaces euclidiens

1. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Il est dit* ***euclidien*** *s'il est muni d'un* ***produit scalaire****, c'est à dire une application*

$$B: \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) & \mapsto & B(\vec{u},\vec{v}) \end{array}$$

(PS1) bilinéaire : $\vec{u}\mapsto B(\vec{u},\vec{v})$ et $\vec{v}\mapsto B(\vec{u},\vec{v})$ sont linéaires ;
(PS2) symétrique : $\forall(\vec{u},\vec{v})\in E\times E \qquad B(\vec{u},\vec{v})=B(\vec{v},\vec{u})$;
(PS3) définie positive : $\forall\vec{u}\in E \qquad B(\vec{u},\vec{u})\geq 0$ et $\big(B(\vec{u},\vec{u})\geq 0\big)\Longrightarrow(\vec{u}=\vec{0})$.

2. *Un espace affine $\mathscr{E}$ est dit* ***euclidien*** *si sa direction vectorielle $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est un espace vectoriel euclidien.*

Notations 3.1.2

1. On note souvent le produit scalaire $\langle\vec{u}\mid\vec{v}\rangle=B(\vec{u},\vec{v})$ ou simplement $\vec{u}\cdot\vec{v}=B(\vec{u},\vec{v})$;
2. On note également
   — le **carré scalaire** $\vec{u}^{\,2}=B(\vec{u},\vec{u})=\langle\vec{u}\mid\vec{u}\rangle=\vec{u}\cdot\vec{u}$;
   — la **norme euclidienne** associée au produit scalaire (voir ci-dessous) : $\|u\|=\sqrt{\vec{u}^{\,2}}$;
   — la **distance euclidienne** : pour $A,B\in\mathscr{E}$, $\;AB=\mathrm{d}(A;B)=\|\overrightarrow{AB}\|=\|B-A\|$.

— si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ (c'est une relation symétrique, qui n'est ni réflexive, ni transitive) ; si $A \subset E$, $A^{\perp} = \{\vec{u} : \forall \vec{v} \in A,\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}$.
— on dit que $\vec{u}$ est **unitaire** si $\|\vec{u}\| = 1$. Si $\vec{v} \neq 0$, alors $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ est unitaire.

On renvoie au chapitre 1 pour un rappel des propriétés du produit scalaire et son interprétation géométrique.

Nota Bene **Perpendiculaire versus orthogonal**

Soient deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$, $\vec{\mathscr{F}}$ et $\vec{\mathscr{G}}$ leurs directions respectives.

— Les deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont **orthogonaux** si **tout** vecteur de $\vec{\mathscr{F}}$ est orthogonal à **tout** vecteur de $\vec{\mathscr{G}}$, autrement dit si les directions $\vec{\mathscr{F}}$ et $\vec{\mathscr{G}}$ sont orthogonales :

$$\vec{\mathscr{F}} \subset \vec{\mathscr{G}}^{\perp} \qquad \text{(ou de façon équivalente} \qquad \vec{\mathscr{G}} \subset \vec{\mathscr{F}}^{\perp}).$$

— Deux sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont **perpendiculaires*** si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$ et si **soit il existe** un vecteur non nul de $\vec{\mathscr{F}}$ orthogonal à **tout** vecteur de $\vec{\mathscr{G}}$ **soit il existe** un vecteur non nul de $\vec{\mathscr{G}}$ orthogonal à **tout** vecteur de $\vec{\mathscr{F}}$. Autrement dit :

$$\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing \quad \text{et} \qquad \text{soit} \quad \vec{\mathscr{G}}^{\perp} \cap F \neq \{\vec{0}\}, \quad \text{soit} \quad \vec{\mathscr{F}}^{\perp} \cap G \neq \{\vec{0}\}.$$

*La définition de perpendiculaire est plus floue et peut dépendre des auteurs : on entend souvent par perpendiculaire l'idée de "se couper à angle droit".

Dans un plan, les deux notions" perpendiculaire" et "orthogonal" se confondent. Dans l'espace de dimension 3 deux droites orthogonales sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes, deux plans peuvent être perpendiculaires mais jamais orthogonaux, et une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à ce plan.

Définition 3.1.3: Isométrie

1. *Soient E et F deux espaces euclidiens. On dit qu'une application $f : E \to F$ conserve le produit scalaire (f est une isométrie vectorielle) si*

$$\forall (\vec{u}; \vec{v}) \in E \times E \qquad \langle f(\vec{u}) \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle.$$

2. *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des espaces affines euclidiens de directions vectorielles $\vec{\mathscr{E}}$ et $\vec{\mathscr{F}}$ respectivement. On dit qu'une application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est une isométrie affine si elle conserve les distances, c'est à dire*

$$\forall (M, N) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E} \qquad \mathrm{d}\big(\varphi(M), \varphi(N)\big) = \mathrm{d}(M, N).$$

Lemme 3.1.4: Linéarité des isométries vectorielles

Si E et F sont deux espaces vectoriels euclidiens, une application $f : E \to F$.

1. *Si f conserve le produit scalaire, alors elle conserve la norme et c'est une application linéaire injective.*
2. *Si $E = F$ les isométries vectorielles sont appelés endomorphismes orthogonaux et forment un groupe noté $O(E)$.*
3. *Si f conserve la norme (euclidienne) et est linéaire*, alors elle conserve le produit scalaire.*

* * * * * * * * * *

Attention : une application peut conserver la norme sans être linéaire (e.g. $t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$).

Voir la démonstration (page 94)

Théorème 3.1.5: Caractère affine des isométries

1. *Une isométrie affine $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est une application affine injective (en particulier, $\dim \mathscr{E} \leq \dim \mathscr{F}$). De plus, si $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{F}$, c'est une bijection. En particulier, une isométrie affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une transformation de $\mathscr{E}$.*
2. *La composée de deux isométries est une isométrie.*
3. *Les isométries de $\mathscr{E}$ forment un groupe pour la composition, noté $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$. La partie linéaire d'une isométrie de $\mathscr{E}$ est une transformation orthogonale ($\varphi \in \mathrm{Is}(\mathscr{E}) \Rightarrow \vec{\varphi} \in O(E)$).*

Voir la démonstration (page 95)

Conséquences

Une translation est une isométrie. Une isométrie est la composée d'une translation et d'une isométrie qui fixe au moins un point. Par une isométrie,

1. les images de deux droites orthogonales sont deux droites orthogonales orthogonales ;
2. les images de deux plans perpendiculaires sont deux plans perpendiculaires. . .
3. l'image d'un cercle est un cercle de même rayon ; d'une sphère est une sphère de même rayon ;
4. l'image d'un triangle est un triangle isométrique en particulier de même nature (isocèle, équilatéral, rectangle. . .) ;
5. l'image d'un carré est un carré isométrique ; d'un rectangle, d'un losange. . .un rectangle, un losange isométrique.. . .

3.2 Isométries du plan affine euclidien

On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, de direction vectorielle $\vec{\mathscr{P}}$. On note $\mathrm{Is}_+(\mathscr{P})$ l'ensemble des isométries qui conservent toute orientation de $\mathscr{P}$, c'est à dire les **déplacements** (c'est un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathscr{P})$. Pourquoi, au fait ?), et $\mathrm{Is}_-(\mathscr{P}) = \mathrm{Is}(\mathscr{P}) \setminus \mathrm{Is}_+(\mathscr{P})$ l'ensemble des isométries qui renversent toute l'orientation de $\mathscr{P}$, c'est à dire les **antidéplacements** (ce n'est surtout pas un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathscr{P})$! Et pourquoi pas ?).

3.2.1 Les quatre types d'isométries du plan

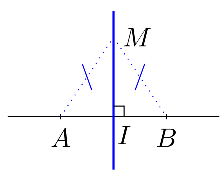
On va raisonner sur le nombre de points fixes pour faire l'inventaire des isométries de $\mathscr{P}$.

Cas de trois points fixes non alignés : l'identité

Trois points non alignés forment un repère barycentrique. Donc une transformation affine du plan qui fixe trois points non alignés est l'identité, qui est une isométrie qui conserve toute orientation de $\mathscr{P}$.

Cas de deux points fixes distincts : réflexion du plan

La **médiatrice** d'un segment $[AB]$ (non réduit à un point) est la droite $\mathscr{D}$ satisfaisant les deux propriétés équivalentes (équivalence à démontrer ! N'y aurait-il pas du Pythagore la derrière ?) suivantes :
- $\mathscr{D}$ est la perpendiculaire à (AB) passant par I milieu de $[AB]$
- $\mathscr{D}$ est la droite des points équidistants de A et B.



Définition 3.2.1: Réflexion

*On appelle **réflexion** du plan une symétrie s par rapport à une droite $\mathscr{D}$, de direction orthogonale à cette droite. On dit que $\mathscr{D}$ est l'**axe de la réflexion** s. C'est un élément de $\mathrm{Is}_-(\mathscr{P})$.*

Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de $\vec{\mathscr{D}}$ et $\vec{v}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{\mathscr{D}}$ alors, $\vec{s} : \vec{\mathscr{P}} \to \vec{\mathscr{P}}$ a pour matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Comme ${}^tS = S^{-1}$, c'est la matrice d'une transformation orthogonale ($\vec{s}$ conserve les produits scalaires) et comme $\det S = -1$, $\vec{s}$ renverse toute orientation. Ainsi s est une **isométrie (involutive) qui renverse toute orientation**. L'axe $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points fixes. C'est aussi la médiatrice de $[M\, s(M)]$ pour tout $M \notin \mathscr{D}$.

Exercice 3.2.2

1. Montrer que dans une base orthonormale la partie linéaire d'une réflexion du plan a une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$
2. Montrer que toute réflexion vectorielle $\vec{s}$ a deux valeurs propres 1 et -1, que l'axe $\mathscr{D}$ a pour direction vectorielle $\ker(\vec{s} - \vec{\mathrm{id}})$ et que la direction orthogonale est $\ker(\vec{s} + \vec{\mathrm{id}})$.

Proposition 3.2.3: Réflexion échangeant deux points donnés

1. *Il existe une unique réflexion échangeant deux points A et B distincts donnés.*
2. *Soit φ une isométrie du plan qui fixe deux points distincts A et B et qui est distincte de l'identité. Alors φ est la réflexion d'axe (AB).*

Démonstration.

1. *Soit I le milieu de $[AB]$ et $\mathscr{D}$ la médiatrice de $[AB]$. Soit s la réflexion d'axe $\mathscr{D}$. Alors s convient. Supposons qu'une autre réflexion s' échange A et B. Son axe doit passer par I car I est envoyé sur I en tant que milieu de $[AB]$ (conservation du barycentre). Comme s' conserve l'orthogonalité, $\mathscr{D}$ est l'axe de s'. Maintenant, $s' \circ s^{-1} = s' \circ s$ a au moins trois points fixes non alignés : A, B et tout point de $\mathscr{D}$ donc c'est l'identité. D'où $s' = s$.*
2. *Comme φ fixe A et B, φ fixe (AB) par conservation des barycentres. Soit s la réflexion d'axe (AB) et $C \notin (AB)$. Alors (AB) est la médiatrice de $[Cs(C)]$. Comme φ conserve les distances,(AB) est aussi la médiatrice de $[C\varphi(C)]$ donc $\varphi(C) = s(C)$. Ainsi $\varphi \circ s^{-1} = \varphi \circ s^{-1}$ fixe trois points donc $\varphi = s$.*

□

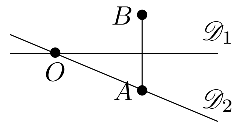
Cas d'un unique point fixe : rotation du plan

Proposition 3.2.4: Produit de deux réflexions d'axes sécants

Soit φ une isométrie fixant un unique point O. Alors il existe deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sécantes en O telles que $\varphi = s_1 \circ s_2$ où s_1 et s_2 sont les réflexions d'axes respectifs $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
*De plus, l'**un de ces deux axes peut être choisi arbitrairement**.*

Démonstration. *Soient A un point distinct de O, $B = \varphi(A)$ et $\mathscr{D}_1$ la médiatrice de $[AB]$ ($A \neq B$) :*

φ étant une isométrie, $\mathscr{D}_1$ passe par O ($OA = OB$). Soit s_1 la réflexion d'axe $\mathscr{D}_1$. Alors $s_1 \circ \varphi$ fixe O et A donc c'est soit l'identité, soit la réflexion s_2 d'axe $\mathscr{D}_2 = (OA)$. L'identité est exclue sinon $\varphi = s_1$ a une droite de points fixes. Ainsi, $s_1 \circ \varphi = s_2$ et donc $\varphi = s_1 \circ s_2$. L'axe $\mathscr{D}_2$ est défini par le choix arbitraire de A. En utilisant $\varphi \circ s_1$ et B au lieu de $s_1 \circ \varphi$ et A, on aurait fixé arbitrairement l'autre axe.



□

Définition 3.2.5: Rotation

*On appelle **rotation** de $\mathscr{P}$ de centre O la composée de deux réflexions d'axes **sécants** (ou confondu : on considère alors l'identité comme une rotation). C'est une isométrie affine dont l'inverse est également une rotation de centre O. Elle **conserve toute orientation** de $\mathscr{P}$.*

Exercice 3.2.6

1. Montrer que dans une base orthonormale la partie linéaire d'une rotation du plan a une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$
2. On note $SO_2(\mathbb{R}))$ l'ensemble des matrices de cette forme. Vérifier que $SO_2(\mathbb{R}))$ est un groupe commutatif.
3. Montrer que la composée de deux rotations de même centre est une rotation, et que **cette composée commute** (raisonner sur les points fixes). En déduire que l'ensemble des rotations de centre O donné forment un **groupe commutatif** (isomorphe à $SO_2(\mathbb{R})$).

Aucun point fixe : translation ou symétrie glissée

Proposition 3.2.7: Translation = composée de deux réflexions d'axes parallèles

Soient s_1 et s_2 deux réflexions d'axes respectifs $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ strictement parallèles. Alors $\varphi = s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ satisfaisant les propriétés caractéristiques*

1. *le vecteur de translation $\vec{u}$ est normal de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ (i.e. orthogonal à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$)*
2. *la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ envoie $\mathscr{D}_1$ sur $\mathscr{D}_2$.*

Réciproquement, toute translation (distincte de l'identité) est composée de deux réflexions d'axes strictement parallèles, satisfaisant 1. et 2., dont l'**un des deux peut être choisi arbitrairement**.*

****

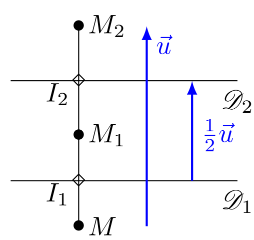
**Le cas de deux droites confondues donne l'identité.*

Démonstration. *Pour tout point M de $\mathscr{P}$, on note $M_1 = s_1(M)$ et $M_2 = s_2(M_1) = \varphi(M)$, I_1 le milieu de $[MM_1]$ et I_2 le milieu de $[M_1M_2]$. On a :*

$$\overrightarrow{MI_1} = \overrightarrow{I_1M_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_1I_2} = \overrightarrow{I_2M_2} \qquad (MM_2) = (I_1I_2) \,//\, \mathscr{D}_1 \,//\, \mathscr{D}_2$$

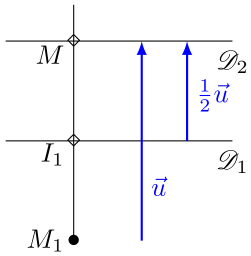
donc

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MI_1} + \overrightarrow{I_1M_1} + \overrightarrow{M_1I_2} + \overrightarrow{I_2M_2} = 2\overrightarrow{I_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1I_2} = 2\overrightarrow{I_1I_2}.$$



*Le vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{I_1I_2}$ est indépendant de M et orthogonal à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Donc φ est bien la translation de vecteur $\vec{u}$ qui satisfait les propriétés 1 et 2.*

Réciproquement, si φ est une translation de vecteur $\vec{u}$ et s_1 une réflexion d'axe $\mathscr{D}_1$ orthogonal à $\vec{u}$, alors $\varphi \circ s_1$ fixe tout point de la droite $\mathscr{D}_2$ image de $\mathscr{D}_1$ par translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$. En effet, si $M \in \mathscr{D}_2$, en notant $M_1 = s_1(M)$ et I_1 le milieu de $[MM_1]$, $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_1I_1} + \overrightarrow{I_1M} = \vec{u}$ d'où $\varphi(s_1(M)) = \varphi(M_1) = M$. Comme $\varphi \circ s_1$ est distinct de l'identité ($\varphi \neq s_1^{-1} = s_1$), $\varphi \circ s_1$ est nécessairement la réflexion s_2 d'axe $\mathscr{D}_2$. Ainsi

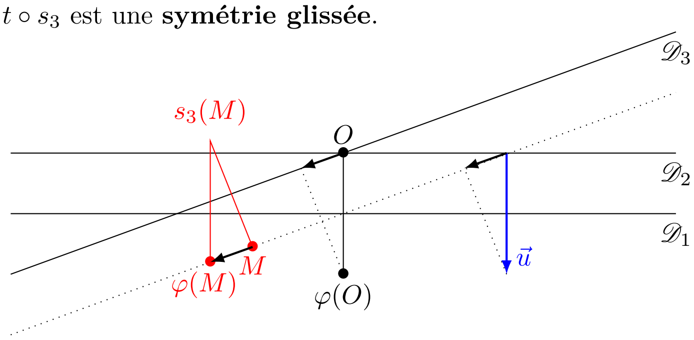


$$\varphi \circ s_1 = s_2 \quad \textit{donc} \quad \varphi = s_2 \circ s_1.$$

Remarquons qu'on aurait pu fixer s_2 en premier et montrer que $s_2 \circ \varphi$ est une réflexion. □

Soit φ une isométrie qui ne fixe aucun point. Soit O un point quelconque de $\mathscr{P}$. Soit s_1 la réflexion d'axe $\mathscr{D}_1$ la médiatrice de $[O\varphi(O)]$. Alors $s_1 \circ \varphi$ est une isométrie qui fixe O. On a alors trois cas

- premier cas : $s_1 \circ \varphi$ fixe trois points non alignés. Alors $s_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}$ donc $\varphi = s_1$, **ce qui est exclu** puisque s_1 a une droite de points fixes.
- deuxième cas : $s_1 \circ \varphi$ fixe deux points (dont O) mais pas trois points non alignés, alors $s_1 \circ \varphi$ est une réflexion s_2 d'axe $\mathscr{D}_2$ passant par O. Ainsi, $\varphi = s_1 \circ s_2$. Les deux axes ne peuvent être ni sécants ni confondus puisque φ n'a pas de points fixes. Donc $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont strictement parallèles, et donc φ **est une translation** (et conserve l'orientation).
- troisième cas : $s_1 \circ \varphi$ fixe uniquement le point O. Il existe alors deux droites distinctes $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ passant O telles que
$$s_1 \circ \varphi = s_2 \circ s_3 \qquad \textit{i.e.} \quad \varphi = s_1 \circ s_2 \circ s_3$$
où s_2 et s_3 sont les réflexions d'axes respectifs $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ (φ renverse l'orientation). De plus, on peut choisir l'axe $\mathscr{D}_2$ parallèle à l'axe $\mathscr{D}_1$ de s_1, si bien que $t = s_1 \circ s_2$ est une translation. Ainsi, $\varphi = s_1 \circ s_2 \circ s_3 = t \circ s_3$ est une **symétrie glissée**.



Définition 3.2.8: Symétrie glissée

*On appelle **symétrie glissée** la composée $t \circ s$ (ou $s \circ t$) d'une translation t et d'une réflexion s d'axe non orthogonal* au vecteur de translation. C'est une isométrie affine dont l'inverse est également une symétrie glissée. Elle **renverse toute orientation** de $\mathscr{P}$.*

* * * * * * * * * *

**le cas orthogonal donne une réflexion.*

Tableau résumant la situation

Points fixes	Orientation préservée	Orientation renversée	nombre minimal de réflexions
Tout le plan	identité $\mathrm{id}_{\mathscr{P}}$		aucune
Une droite $\mathscr{D}$		réflexion d'axe $\mathscr{D}$	une seule
Un unique point O	rotation de centre O		deux, d'axes sécants en O
aucun	translation de vecteur		deux, d'axes parallèles
aucun		symétrie glissée	trois, d'axes non concourants ni les trois parallèles

Exercice 3.2.9

1. En utilisant la proposition 3.2.4, montrer que la composée de trois réflexions d'axes deux à deux parallèles est une réflexion d'axe encore parallèle à ces trois axes.
2. En déduire que la composée (dans un sens ou dans l'autre) d'une réflexion et d'une translation de vecteur normal à l'axe de la réflexion est réflexion d'axe parallèle au précédent.
3. En utilisant la proposition 3.2.4 et la proposition 3.2.7, montrer que la composée de n réflexions est soit l'identité, soit la composée de 2 réflexions si n est pair, soit une réflexion ou une symétrie glissée si n est impair.

3.2.2 Propriétés des isométries du plan - conséquences

Proposition 3.2.10: Décomposition canonique d'une symétrie glissée

Soit φ une symétrie glissée. Alors il existe une unique droite $\mathscr{D}$ et un unique vecteur $\vec{u}$ tels que

$$\varphi = t \circ s = s \circ t$$

où t est la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la réflexion d'axe $\mathscr{D}$.
De plus, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des milieux des segments $[M\varphi(M)]$, $\varphi \circ \varphi$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$ et, s'il n'est pas nul, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Voir la démonstration (page 96)

Angles de vecteurs (ou de demi-droites)

On définit une relation $\sim$ sur les couples de vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien :

$(\vec{u}_1, \vec{v}_1) \sim (\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ s'il existe une rotation vectorielle $\vec{r}$ telle que $\vec{r}(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$ et $\vec{r}(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$.

C'est une relation d'équivalence :

— elle est réflexive : pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs unitaires, $\vec{\mathrm{id}}(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\vec{\mathrm{id}}(\vec{v}) = \vec{v}$ donc

$$(\vec{u}, \vec{v}) \sim (\vec{u}, \vec{v});$$

— elle est symétrique : pour tous couples $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ et $(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ de vecteurs unitaires, si $\vec{r}$ est une rotation vectorielle telle que $\vec{r}(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$ et $\vec{r}(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$, alors $\vec{r}^{-1}(\vec{u}_2) = \vec{u}_1$ et $\vec{r}^{-1}(\vec{v}_2) = \vec{v}_1$ donc

$$\Big((\vec{u}_1, \vec{v}_1) \sim (\vec{u}_2, \vec{v}_2)\Big) \Longrightarrow \Big((\vec{u}_2, \vec{v}_2) \sim (\vec{u}_1, \vec{v}_1)\Big);$$

— elle est transitive : pour tous couples $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$, $(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$, $(\vec{u}_3, \vec{v}_3)$ de vecteurs unitaires, si $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont des rotations vectorielles telles que $\vec{r}_1(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$, $\vec{r}_1(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$, $\vec{r}_2(\vec{u}_2) = \vec{u}_3$ et $\vec{r}_2(\vec{v}_2) = \vec{v}_3$, alors $\vec{r}_1 \circ \vec{r}_1(\vec{u}_1) = \vec{u}_3$ et $\vec{r}_1 \circ \vec{r}_1(\vec{v}_1) = \vec{v}_3$ donc

$$\Big((\vec{u}_1, \vec{v}_1) \sim (\vec{u}_2, \vec{v}_2) \quad \text{et} \quad (\vec{u}_2, \vec{v}_2) \sim (\vec{u}_3, \vec{v}_3)\Big) \Longrightarrow \Big((\vec{u}_1, \vec{v}_1) \sim (\vec{u}_3, \vec{v}_3)\Big).$$

Définition 3.2.11: Angles de vecteurs

1. *On appelle* ***angle (orienté) de vecteurs unitaires*** *une classe d'équivalence de couples de vecteurs unitaires. On note $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*
2. *Plus généralement, si $(\vec{u}, \vec{v})$ est un couple de vecteurs non nuls, on définit l'****angle de vecteurs*** *$\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$ comme étant l'angle entre les vecteurs unitaires $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$.*
3. *Si A et B sont deux points du plan distinct d'un troisième point O, on définit l'angle $\widehat{AOB}$*

comme étant l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$.
*De même, si $[OA)$ et $[OB)$ sont deux demi-droites $\widehat{AOB} = (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ est l'**angle entre les deux demi-droites**.*

Le théorème suivant fait le lien entre les angles et les rotation du plan. Il permet en particulier de définir la **mesure d'un angle**. L'ingrédient fondamental est que le groupe $SO(\vec{\mathscr{P}})$ des rotations vectorielles du plan est **commutatif** (cf. exercice 3.2.6).

Théorème 3.2.12: lien entre angle de vecteurs et rotation vectorielle

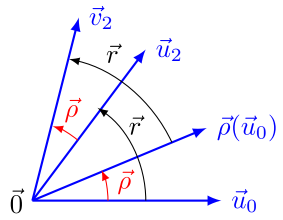
1. *Pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs unitaires, il existe une unique rotation vectorielle $\vec{\rho}$ telle que $\vec{\rho}(\vec{u}) = \vec{v}$.*
2. *Si $\vec{u}_0$ est un vecteur unitaire et $\vec{\rho}$ une rotation vectorielle, pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs unitaires, on a l'équivalence :* $\Big((\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}_0;\vec{\rho}(\vec{u}_0)})\Big) \Leftrightarrow \Big(\vec{v} = \vec{\rho}(\vec{u})\Big)$.

Conséquence

*Ce théorème nous dit que dans le plan, on a une **bijection naturelle entre l'ensemble des angles de vecteurs et les rotations vectorielles**. En effet, une rotation vectorielle $\vec{\rho}$ définit l'angle $(\widehat{\vec{u}_0;\vec{\rho}(\vec{u}_0)})$ et réciproquement tout angle de vecteurs unitaires $(\widehat{\vec{u}_0;\vec{v}_0})$ donne une unique rotation $\vec{\rho}$ telle que $\vec{\rho}(\vec{u}_0) = \vec{v}_0$.*

Démonstration.

1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires. On complète ces vecteurs en deux bases orthonormales $(\vec{u},\vec{u}')$ et $(\vec{v},\vec{v}')$ de même orientation (c'est à dire le déterminant de la matrice de passage P $(\vec{u},\vec{u}')$ à $(\vec{v},\vec{v}')$ à l'autre est positif). Alors ρ est l'unique rotation vectorielle définie par $\rho(\vec{u}) = \vec{v}$ et $\rho(\vec{u}') = \vec{v}'$: sa matrice dans la base $(\vec{u},\vec{u}')$ est exactement la matrice de passage P.*
2. *Supposons $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}_0;\vec{\rho}(\vec{u}_0)})$. Soit $\vec{r}$ une rotation telle que*
$$\vec{u} = \vec{r}(\vec{u}_0) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{r}\big(\vec{\rho}(\vec{u}_0)\big)$$
Alors
$$\vec{\rho}(\vec{u}) = \vec{\rho}\circ\vec{r}(\vec{u}_0) = \vec{r}\circ\vec{\rho}(\vec{u}_0) = \vec{v}.$$



□

Corollaire 3.2.13: Groupe des angles de vecteurs

Les angles de vecteurs forment un groupe commutatif, l'addition des angles se faisant par la relation de Chasles : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v};\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{w}})$. En particulier $(\widehat{\vec{u};\vec{u}})$ est élément neutre et $(\widehat{\vec{v};\vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

Remarque 3.2.14

1. Pour additionner $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}';\vec{v}'})$ on choisit un autre représentant de l'angle $(\widehat{\vec{u}';\vec{v}'})$: si $\vec{\rho}$ est la rotation vectorielle telle que $\vec{\rho}(\vec{u}') = \vec{v}'$, alors on pose $\vec{w} = \vec{\rho}(\vec{v})$. On a alors :
$$(\widehat{\vec{u}';\vec{v}'}) = (\widehat{\vec{v};\vec{w}}) \quad \text{et donc} \quad (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) + (\widehat{\vec{u}';\vec{v}'}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v};\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{w}}).$$
2. On dit que deux couples de vecteurs définissent le même **angle géométrique** (non orienté

celui-là !) si leurs angles sont égaux ou opposés. On n'a pas de structure de groupe pour les angles géométriques.

Mesure d'angle

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'une orientation c'est à dire : on se donne une base de référence $\mathscr{B}_0$ dans $\vec{\mathscr{P}}$ par rapport à laquelle toute base $\mathscr{B}$ est directe si et seulement si le déterminant de la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est positif. Dans toute base directe, une rotation vectorielle $\vec{r}$ a **toujours la même matrice** R, qui est de la forme

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a^2 + b^2 = 1$$

En effet, toute matrice de changement de base directe P est de la même forme que R et deux matrices de ce types commutent. On a donc

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

On peut alors associer à $\vec{r}$ le nombre réel θ défini modulo 2π tel que $e^{i\theta} = a + ib$ (ou encore $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$). Le nombre θ est appelé **mesure d'angle** de la rotation. C'est aussi la mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{r}(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Remarques 3.2.15

1. La mesure d'angle présentée ici est le **radian**. On peut choisir d'autres mesures d'angle, par exemple le degré en utilisant l'application $d \mapsto e^{i\frac{\pi}{180}d}$, le grade avec $g \mapsto e^{i\frac{\pi}{200}g}$, le nombre de tours avec $t \mapsto e^{2i\pi t}$...
2. **La mesure d'angle dépend de l'orientation choisie** : la matrice R ci-dessus est transformée en sa transposée ${}^tR$ par changement d'une base orthonormale directe à une orthonormale indirecte. En effet, si P est la matrice d'un tel changement de base on a :

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

   Le changement d'orientation donne donc $\theta \mapsto -\theta$ sur la mesure d'angle. Remarquons que **le sinus dépend de l'orientation, mais pas le cosinus** (le cosinus est la moitié de la trace de R, qui est invariante par tout changement de base !). Seuls deux angles ne dépendent pas de l'orientation : l'angle nul $\widehat{(\vec{u};\vec{u})}$ et l'angle plat $\widehat{(\vec{u};-\vec{u})}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$.
3. On a les formules du cosinus et du sinus : si $\widehat{(\vec{u};\vec{v})}$ a pour mesure θ,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \qquad \sin\theta = \frac{\det_{\mathscr{B}_0}(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

   (on voit à nouveau que le sinus dépend de l'orientation, pas le cosinus).
4. L'addition des angles correspond à l'addition de leurs mesures modulo 2π.

Retour sur les propriétés des isométries

Nota Bene

1. L'ensemble des isométries du plan est le groupe $\mathrm{Is}(\mathscr{P})$. Les isométries conservent les angles **géométriques**. (Attention : la réciproque est fausse).
2. Les **déplacements** sont les isométries qui conservent les angles orientés. Ils forment le sous-groupe $\mathrm{Is}_+(\mathscr{P})$ de $\mathrm{Is}(\mathscr{P})$. Le sous-groupe $\mathrm{Is}_+(\mathscr{P})$ comprends : les translations et les

rotations.

(a) Une translation est définie uniquement par la donnée de son vecteur de translation. Les translations forment un sous-groupe de $\mathrm{Is}_+(\mathscr{P})$.

(b) Une rotation est définie uniquement par la donnée de son centre et de son angle.

(c) La composée de deux rotations est :
— une rotation si les angles ne sont pas opposés ;
— une translation si les angles sont opposés.

(d) La composée d'une rotation et d'une translation est une rotation.

3. Les **antidéplacements** sont les isométries qui renversent les angles orientés. On note $\mathrm{Is}_-(\mathscr{P})$ l'ensemble des antidéplacements. Il comprend : les réflexions et les symétries glissées. **Attention** : elles ne forment pas un sous-groupe de $\mathrm{Is}(\mathscr{P})$; la composée d'un nombre pair d'antidéplacements est un déplacement et la composée d'un nombre impair d'antidéplacements est un antidéplacement.

(a) Une réflexion est définie uniquement par la donnée de son axe.

(b) Une symétrie glissée est définie uniquement par la donnée de son axe (droite des milieux des points avec leur image) et un vecteur directeur de cet axe. Le carré d'une symétrie glissée est une translation de vecteur le double de ce vecteur directeur.

(c) La composée de deux réflexions est
— une rotation si les axes sont sécants, de centre l'intersection des deux axes et d'angle le double de l'angle entre deux vecteurs directeurs quelconques des deux axes ;
— une translation si les axes sont parallèles, de vecteur normal aux axes, qui est le double du vecteur normal de translation envoyant un axe sur l'autre.

(d) De même, la composée de deux symétries glissées, ou d'une réflexion avec une symétrie glissée peut être une rotation ou une translation selon que les axes sont parallèles ou non.

Exercices 3.2.16

1. Si ABC est un triangle (non dégénéré), alors $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$ est plat.
2. Loi des cosinus ou formules d'Al Khashi : si ABC est un triangle (non dégénéré), exprimer $\cos(\widehat{BAC}), \cos(\widehat{CBA})$ et $\cos(\widehat{ACB})$ en fonction de $a = BC$,$b = AC$ et $c = AB$.

Angle de droites

De même que pour les vecteurs, on définit une relation $\approx$ sur les couples de droites vectorielles d'un plan vectoriel euclidien :

$$(\vec{\mathscr{D}}_1, \vec{\Delta}_1) \approx (\vec{\mathscr{D}}_2, \vec{\Delta}_2) \text{ s'il existe une rotation vectorielle } \vec{r} \text{ telle que } \vec{r}(\vec{\mathscr{D}}_1) = \vec{\mathscr{D}}_2 \text{ et } \vec{r}(\vec{\Delta}_1) = \vec{\Delta}_2.$$

C'est une relation d'équivalence.

Définition 3.2.17: Angle de droites

1. *On appelle* ***angle (orienté) de droites*** *une classe d'équivalence de couples de droites vectorielles pour cette relation. On note* $(\widehat{\vec{\mathscr{D}};\vec{\Delta}})$ *l'angle entre* $\vec{\mathscr{D}}$ *et* $\vec{\Delta}$.
2. *Plus généralement, si* $\mathscr{D}_1$ *et* $\mathscr{D}_2$ *sont sécantes on définit l'angle* $(\widehat{\mathscr{D}_1;\mathscr{D}_2})$ *comme étant l'angle entre les directions vectorielles* $(\widehat{\vec{\mathscr{D}}_1;\vec{\mathscr{D}}_2})$.

La différence entre les angles de vecteurs et les angles de droites réside dans le fait que $-\vec{\mathrm{id}}$ envoie toute droite vectorielle sur elle-même.

Théorème 3.2.18: lien entre angle de droites et angle de vecteurs

1. *Pour tout couple* $(\vec{\mathscr{D}}, \vec{\Delta})$ *de droites vectorielles, il existe exactement* ***deux rotations vectorielles*** $\vec{\rho}$ *et* $-\vec{\rho}$ *envoyant* $\vec{\mathscr{D}}$ *sur* $\vec{\Delta}$.
2. *Si* $\vec{\mathscr{D}}_0$ *est une droite vectorielle et* $\vec{\rho}$ *une rotation vectorielle, pour tout couple de droites vectorielles* $(\vec{\mathscr{D}}, \vec{\Delta})$*, on a l'équivalence :* $\left((\widehat{\vec{\mathscr{D}}; \vec{\Delta}}) = (\widehat{\vec{\mathscr{D}}_0; \vec{\rho}(\vec{\mathscr{D}}_0)}) \right) \Leftrightarrow \left(\vec{\Delta} = \vec{\rho}(\vec{\mathscr{D}}) \right)$.

<u>*Démonstration.*</u> *En exercice.* □

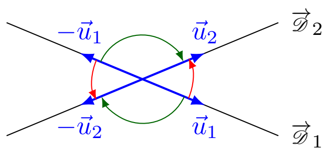
En d'autres termes, on a donc une application naturelle des angles de vecteurs dans les angles de droites :

$$(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2}) \longmapsto (\widehat{\vec{\mathscr{D}}_1; \vec{\mathscr{D}}_2})$$

où $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de $\vec{\mathscr{D}}_1$ et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de $\vec{\mathscr{D}}_2$. Cette application est surjective, mais pas injective : à chaque angle de droite correspondent exactement deux angles

$$(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2}) = (\widehat{-\vec{u}_1; -\vec{u}_2}) \quad \text{et} \quad (\widehat{\vec{u}_1; -\vec{u}_2}) = (\widehat{-\vec{u}_1; \vec{u}_2})$$

qui diffèrent d'un angle plat. Cela permet de définir la **mesure d'un angle de droites** : les mesures des deux angles de vecteurs $(\widehat{\vec{u}_1; \vec{u}_2})$ et $(\widehat{\vec{u}_1; -\vec{u}_2})$ diffèrent de π modulo 2π.



Nota Bene

1. Attention à ne pas confondre la rotation $-\vec{\rho}$ avec $\vec{\rho}^{-1}$. Les angles de $\vec{\rho}$ et de $\vec{\rho}^{-1}$ sont opposés, alors que les angles de $\vec{\rho}$ et de $-\vec{\rho}$ diffèrent d'un angle plat !
   Si on oriente le plan, et si $\vec{\rho}$ a un angle de mesure θ, alors $\vec{\rho}^{-1}$ a un angle de mesure $-\theta$ et $-\vec{\rho}$ un angle de mesure $\theta + \pi$.
2. Les angles de droites, comme les angles de vecteurs sont orientés. Ils forment un groupe commutatif.
3. **Attention** : le passage de “modulo 2π” à “modulo π” est trompeur ! Le passage des angles de vecteurs aux angles de droites n'est pas une division par 2 (ce qui fondamentalement n'a pas vraiment de sens dans le groupe des angles de vecteurs).

Bissectrices

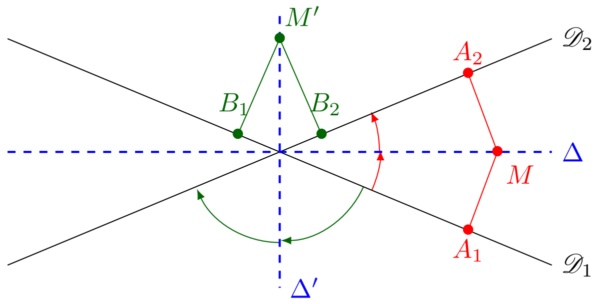
Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites sécantes en O. Les axes Δ et Δ' des deux réflexions qui échangent les deux droites sont appelés les **bissectrices** de l'angle de droite. Ces axes sont perpendiculaires et forment l'ensemble des points qui sont à égale distance des deux droites :

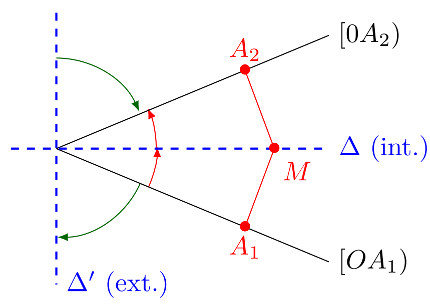
$$\Delta \cup \Delta' = \{M \in \mathscr{P} : \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_1) = \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_2)\}.$$

De plus :

$$(\widehat{\mathscr{D}_1; \Delta}) = (\widehat{\Delta; \mathscr{D}_2}) \quad \text{et} \quad (\widehat{\mathscr{D}_1; \Delta'}) = (\widehat{\Delta'; \mathscr{D}_2}).$$

Si on ne considère que des demi-droites issues de O on distingue la **bissectrice intérieure**, qui est l'axe de la réflexion qui échange les demi-droites droites de la **bissectrice extérieure** qui est sa perpendiculaire en O.





Le théorème de l'angle inscrit - Cocyclicité

Théorème 3.2.19: théorème de l'angle inscrit

Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A, B deux points distincts de $\mathscr{C}$.

1. ***Angle au centre.*** $\forall M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\} \qquad (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})$.
2. ***Angle inscrit.*** $\forall M, N \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\} \qquad (\widehat{(MA);(MB)}) = (\widehat{(NA);(NB)})$.
3. ***Le cas limite : angle de la tangente.*** *Soit $\mathscr{D}$ la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.*

$$\forall T \in \mathscr{D} \setminus \{A\} \quad \forall M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\} \qquad (\widehat{(MA);(MB)}) = (\widehat{(AT);(AB)}).$$

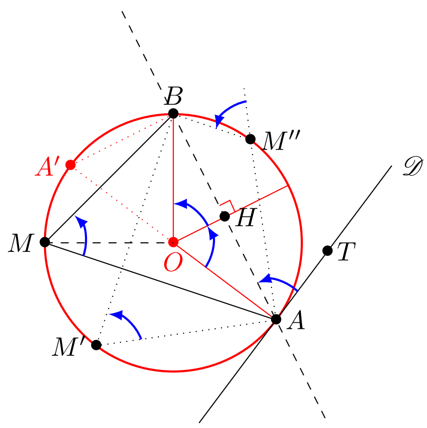
<u>Démonstration.</u> *Soit $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\}$. Les triangles OAM et OBM sont isocèles en O donc :*

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{MA}}) + (\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) + (\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{OB}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{OM}}) + (\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{BM}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) + (\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) \; = 2(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})
\end{aligned}$$

De (1), on déduit immédiatement l'égalité des angles de droites : si M, N sont sur $\mathscr{C} \setminus \{A, B\}$

$$(\widehat{(MA);(MB)}) = (\widehat{(NA);(NB)}).$$

Pour le cas de la tangente, soit $T \in \mathscr{D} \setminus \{A\}$. On considère le symétrique A' de A par rapport à O, et on applique la formule de l'angle au centre. On a :



$$\begin{aligned}
2(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}}) &= 2(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AA'}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{AB}}) \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{A'A}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB}}) \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{A'A}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \\
&= (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})
\end{aligned}$$

car $(AA') \perp (AT)$. pour tout $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\}$ $(\widehat{(MA);(MB)}) = (\widehat{(AT);(AB)})$. □

Exercice 3.2.20

Montrer plus précisément, avec les notations de (2) et (3) du théorème, qu'on a :

— si M et N sont sur le même arc de $\mathscr{C}$ bordé par A et B : $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}})$
— si M et N ne sont pas sur le même arc bordé par A et B : $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}}) + \text{plat}$.
— si M et T ne sont pas dans le même demi-plan bordé par (AB) : $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}})$
— si M et T sont dans le même demi-plan bordé par (AB) : $(\widehat{\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}}) + \text{plat}$.

Pour cela, on peut montrer que si $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\}$ est dans le demi-plan bordé par (AB) contenant O (respectivement ne contenant pas O) et H le milieu de $[AB]$ alors

$$(\widehat{\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) \qquad \text{(respectivement} \quad (\widehat{\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}) + \text{plat}).$$

Corollaire 3.2.21: Cocyclicité

*Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Alors ils sont **cocycliques** ou **alignés** si et seulement si on a égalité des angles de droites*

$$((\widehat{CA);(CB})) = ((\widehat{DA);(DB})).$$

(Le cas aligné équivaut au cas où l'angle est nul).

Démonstration. *Le sens direct est dû au théorème de l'angle inscrit. Pour la réciproque, on suppose que $((\widehat{CA);(CB})) = ((\widehat{DA);(DB})) \neq 0$ (dans le cas contraire, les points sont alignés). Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A telle que $((\widehat{CA);(CB})) = (\widehat{\mathscr{D};(AB)})$, et O le point d'intersection de la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ en A et de la médiatrice de $[AB]$ (elles bien sont sécantes. Pourquoi ?). Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par A. On montre alors qu'il contient nécessairement les points A,B,C et D (en exercice : utiliser les médiatrices et le propriétés des réflexions)* □

3.2.3 Les similitudes - Écriture complexe

Définition 3.2.22: Similitudes

On appelle similitude une transformation qui conserve les rapports de distances.

Proposition 3.2.23: Rapport de similitude

Soit f une similitude. Il existe un unique réel strictement positif k tel que

$$\forall (M, N) \in \mathscr{P}^2 \qquad \mathrm{d}\big(f(M); f(N)\big) = k \times \mathrm{d}(M; N).$$

Le réel k s'appelle le rapport de la similitude f.

Démonstration. *Si f est l'identité, $k = 1$ convient. Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$. On pose $k = \frac{\mathrm{d}(f(A);f(B))}{\mathrm{d}(A;B)}$. Comme f conserve les rapports de distances, pour tout couple $(M, N) \in \mathscr{P}^2$, on a*

$$\frac{\mathrm{d}\big(f(M); f(N)\big)}{\mathrm{d}\big(f(A); f(B)\big)} = \frac{\mathrm{d}(M; N)}{\mathrm{d}(A; B)} \qquad \textit{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}\big(f(M); f(N)\big)}{\mathrm{d}(M; N)} = \frac{\mathrm{d}\big(f(A); f(B)\big)}{\mathrm{d}(A; B)} = k.$$

Ce qui prouve le résultat. □

Corollaire 3.2.24

1. *Une similitude de rapport 1 est une isométrie.*

2. *Une homothétie de rapport $k \neq 0$ est une similitude de rapport $|k|$.*
3. *Soit f une similitude de rapport $k > 0$ différent de 1. Alors f est la composée (non unique) d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie.*
4. *Une similitude est une application affine.*
5. *Les similitudes forment un groupe pour la composition : la composée similitude de rapport k_1 et d'une similitude de rapport k_2 est une similitude de rapport k_1k_2, l'inverse d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$.*

Exercice 3.2.25

1. Montrer que si h est une homothétie h de rapport positif $k \neq 1$ et de centre Ω qui commute avec une isométrie g (*i.e.* $g \circ h = h \circ g$), alors g fixe Ω.
2. Montrer que si f est une similitude de rapport $k \neq 1$ alors elle a un unique point fixe Ω et il existe une unique homothétie h de rapport k et de centre Ω et une unique isométrie g fixant Ω telles que $f = g \circ h = h \circ g$.

Nota Bene

1. Les similitudes sont les transformations affines du plan qui conservent les angles **géométriques**.
2. Les similitudes **directes** sont les transformations affines du plan qui **conservent** les angles orientés. Elles sont caractérisées par un rapport, un angle et un centre (sauf les translations). Elles forment un sous-groupe du groupe des similitudes.
3. Les similitudes **indirectes** sont les transformations affines du plan qui **renversent** les angles orientés. Elles sont caractérisées par un rapport, un axe, un centre (sauf les symétries glissées).
4. Dans $\mathbb{C}$ vu comme espace affine réel, les similitudes ont l'écriture suivante :
   — **Similitude directe** : $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$,
   $$z \mapsto f(z) = az + b.$$
   Rapport : $|a| > 0$, angle de mesure $\arg a$, point fixe (si $a \neq 1$) $\omega = \frac{b}{1-a}$.
   — **Similitude indirecte** : $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$,
   $$z \mapsto f(z) = a\bar{z} + b.$$
   Rapport : $|a| > 0$, axe formant un angle de droite de mesure $\frac{1}{2}\arg a$ avec $\mathbb{R}$, point fixe (si $|a| \neq 1$) $\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$, .

Toute similitude directe se décompose en produits de translations, homothéties, rotations, toute similitude indirecte se décompose en produits d'une réflexion avec des rotations, des translations et des homothéties. Ces quatre types de transformations forment un **système de générateurs** du groupe des similitudes. Les translations, homothéties, rotations forment, elles, un système de générateurs du sous-groupe des similitudes directes.

Type de transformation	**Éléments caractéristiques**	**Écriture complexe**
translation	vecteur b	$z \mapsto z + b$
homothétie	centre ω, rapport $k \in \mathbb{R}^*$	$z \mapsto k(z - \omega) + \omega$
rotation	centre ω, angle de mesure θ	$z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$
réflexion	axe passant par ω, angle θ	$z \mapsto e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{w}) + w$

Exercice 3.2.26

1. Étant donnés quatre points A, B, A', B' du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, montrer qu'il existe une unique similitude directe et une unique similitude indirecte envoyant A sur A' et B sur B'.
2. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables. Montrer qu'il existe une unique similitude envoyant ABC sur $A'B'C'$.

Les démonstrations du chapitre 3

Lemme: Linéarité des isométries vectorielles

Si E et F sont deux espaces vectoriels euclidiens, une application $f : E \to F$.

1. *Si f conserve le produit scalaire, alors elle conserve la norme et c'est une application linéaire injective.*
2. *Si $E = F$ les isométries vectorielles sont appelés endomorphismes orthogonaux et forment un groupe noté $O(E)$.*
3. *Si f conserve la norme (euclidienne) et est linéaire*, alors elle conserve le produit scalaire.*

* * * * * * * * * *

**Attention : une application peut conserver la norme sans être linéaire* (e.g. $t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^2$).

<u>*Démonstration.*</u> *Retour page 78*

1. *Si f conserve le produit scalaire, elle conserve les carrés scalaires donc la norme. Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E$ et tout coupe de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned}\delta &= \|f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \big(\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})\big)\|^2 \\ &= \|f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\|^2 + \lambda^2\|f(\vec{u})\|^2 + \mu^2\|f(\vec{v})\|^2 - 2\lambda f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot f(\vec{u}) - 2\mu f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot f(\vec{v}) \\ &\qquad + 2\lambda\mu f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) \\ &= \|\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\|^2 + \lambda^2\|\vec{u}\|^2 + \mu^2\|\vec{v}\|^2 - 2\lambda(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} - 2\mu(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} + 2\lambda\mu\,\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \|\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\|^2 - \lambda^2\|\vec{u}\|^2 - \mu^2\|\vec{v}\|^2 - 2\lambda\mu\,\vec{u} \cdot \vec{v} \ = \ 0\end{aligned}$$

   donc f est linéaire. On a alors $\big(\vec{u} \in \ker f\big) \Rightarrow \big(\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| = 0\big) \Rightarrow \big(\vec{u} = 0\big)\big)$ donc f est injective.

2. *Si $E = F$, f étant injective, elle est aussi surjective (théorème du rang). De plus, de façon évidente, f^{-1} conserve le produit scalaire et la composée de deux endomorphismes de E qui conservent le produit scalaire est un deux endomorphisme de E qui conserve le produit scalaire, d'où la structure de groupe de $O(E)$.*

3. *Si f conserve la norme et est linéaire, alors pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E$*

$$\begin{aligned}f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) &= \frac{1}{4}\Big(\|f(\vec{u}) + f(\vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u}) - f(\vec{v})\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|f(\vec{u} + \vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u} - \vec{v})\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\Big) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

   donc f conserve le produit scalaire.

□

Théorème: Caractère affine des isométries

1. *Une isométrie affine $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est une application affine injective (en particulier, $\dim \mathscr{E} \leq \dim \mathscr{F}$). De plus, si $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{F}$, c'est une bijection. En particulier, une isométrie affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une transformation de $\mathscr{E}$.*
2. *La composée de deux isométries est une isométrie.*
3. *Les isométries de $\mathscr{E}$ forment un groupe pour la composition, noté $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$. La partie linéaire d'une isométrie de $\mathscr{E}$ est une transformation orthogonale ($\varphi \in \mathrm{Is}(\mathscr{E}) \Rightarrow \vec{\varphi} \in O(E)$).*

Démonstration. *Retour page 79*

1. *L'injectivité est évidente : $\Big(\mathrm{d}\big(\varphi(M), \varphi(N)\big) = \mathrm{d}(M, N)\Big) \Rightarrow (M = N)$.*
   Vectorialisons $\mathscr{E}$ en un point O et $\mathscr{F}$ en $\varphi(O)$. On note E la direction vectorielle de $\mathscr{E}$ et$F$ celle de $\mathscr{F}$. On pose $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$ pour tout $M \in \mathscr{E}$.
   - *f conserve la norme Pour tout $\vec{u} \in E$, soit $M \in \mathscr{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. On a*
   $$\|f(\vec{u})\| = \|f(\overrightarrow{OM})\| = \|\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}\| = \mathrm{d}(\varphi(O), \varphi(M)) = \mathrm{d}(O, M) = \|\vec{u}\|.$$
   - *f conserve le produit scalaire. Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E$, soit $(M, N) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Alors*
   $$\begin{aligned} f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) &= \frac{1}{2}\Big(\|f(\vec{u})\|^2 + \|f(\vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u}) - f(\vec{v})\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \Big\|\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} - \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(N)}\Big\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \Big\|\overrightarrow{\varphi(N)\varphi(M)}\Big\|^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \big[\mathrm{d}(\varphi(N), \varphi(M)\big]^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \big[\mathrm{d}(N, M)\big]^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \Big\|\overrightarrow{NM}\Big\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\,\vec{u} - \vec{v}\,\|^2\Big) = \vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$
   - *D'après le lemme 3.1.4, f est linéaire injective. Ainsi φ est affine injective et $f = \vec{\varphi}$. De plus, si $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{F}$, alors $\dim E = \dim F$, donc $f = \vec{\varphi}$ est un isomorphisme, donc φ est bijective.*
2. *Évident.*
3. *Si φ est une isométrie bijective, sa réciproque est également une isométrie.*

□

Proposition: Décomposition canonique d'une symétrie glissée

Soit φ une symétrie glissée. Alors il existe une unique droite $\mathscr{D}$ et un unique vecteur $\vec{u}$ tels que

$$\varphi = t \circ s = s \circ t$$

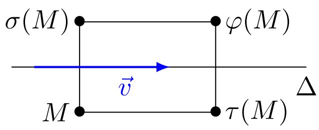
où t est la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la réflexion d'axe $\mathscr{D}$.
De plus, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des milieux des segments $[M\varphi(M)]$, $\varphi \circ \varphi$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$ et, s'il n'est pas nul, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Démonstration. *Retour page 83*

Soit $\varphi = \tau \circ \sigma$ une symétrie glissée. Soit $\vec{v}$ le vecteur de translation et Δ l'axe de la réflexion.

- *Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ, alors τ et σ commutent.*

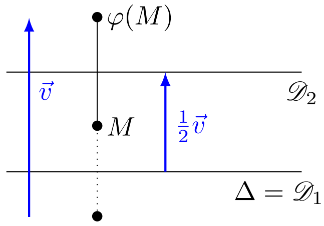
  En effet, $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ est une isométrie qui fixe Δ et renverse l'orientation, donc c'est la réflexion σ.
  On prend alors $t = \tau$ et $s = \sigma$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$ et $\mathscr{D} = \Delta$.



- *Si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{\Delta}$, alors φ est la réflexion s d'axe $\mathscr{D}$ parallèle à Δ, image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.*
  En effet, d'après la proposition 3.2.7, τ est la composée de deux réflexions d'axes orthogonaux à $\vec{v}$ ($\tau = s_2 \circ s_1$). Comme l'un des deux axes peut être choisi arbitrairement et que Δ est orthogonal à $\vec{v}$, on peut choisir $\mathscr{D}_1 = \Delta$ si bien que $s_1 = \sigma$ et donc

  $$\varphi = s_2 \circ s_1 \circ \sigma = s_2.$$

  On pose alors $\vec{u} = \vec{0}$, $t = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}$, $s = s_2$ et $\mathscr{D} = \mathscr{D}_2$.

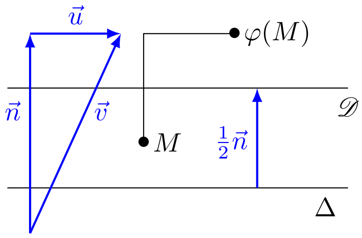


- *Si $\vec{v}$ n'est ni orthogonal, ni contenu dans $\vec{\Delta}$:*
  on décompose $\vec{v}$: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{n}$ avec $\vec{u} \in \vec{\Delta}$ et $\vec{n} \in \vec{\Delta}^{\perp}$. Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ et θ la translation de vecteur $\vec{n}$. On a :

  $$\varphi = \tau \circ \sigma = t \circ \theta \circ \sigma.$$

  Or d'après le deuxième cas $\theta \circ \sigma$ est une réflexion d'axe $\mathscr{D}$ parallèle à Δ (translaté de Δ de vecteur $\frac{1}{2}\vec{n}$). Notons s cette réflexion. D'après le premier cas,

  $$\varphi = t \circ s = s \circ t.$$

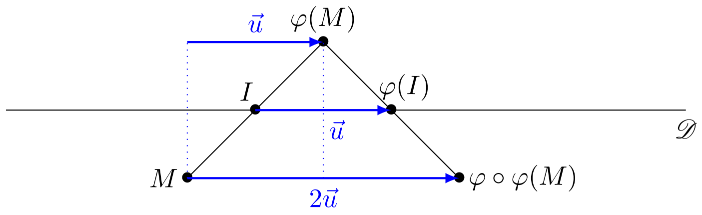


On peut donc supposer que $\varphi = t \circ s = s \circ t$ avec t translation de vecteur $\vec{v}$ et s réflexion d'axe $\mathscr{D}$.

On a immédiatement $\varphi \circ \varphi = t \circ s \circ s \circ t = t \circ t$ donc c'est la translation de vecteur $2\vec{u}$. En outre pour un point M arbitraire, notons I le milieu de $[M\varphi(M)]$. Comme φ conserve les barycentres, $\varphi(M)$ est milieu de $[\varphi(M)\varphi \circ \varphi(M)]$ donc d'après le théorème de Thalès,

$$\overrightarrow{I\varphi(I)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M\,\varphi \circ \varphi(M)} = \vec{u}.$$

Donc $\varphi(I) = t(I)$ et donc $s(I) = I$, si bien que $I \in \mathscr{D}$ et $t(I) = \varphi(I) \in \mathscr{D}$, et donc $\vec{u}$ est bien vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Le vecteur $\vec{u}$ et l'axe $\mathscr{D}$ sont uniquement déterminés par M, $\varphi(M)$ et $\varphi \circ \varphi(M)$, d'où l'unicité de la décomposition.



$\vec{u}$
$\varphi(M)$
I
$\varphi(I)$
$\vec{u}$
$\mathscr{D}$
M
$\varphi \circ \varphi(M)$
$2\vec{u}$

$\square$