Université de Bourgogne Année 2019-2020

TD de Géométrie.

Exercice 1.

1. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, former une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $M_0(3,-1,4)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(1,3,-1)$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(-1,2,2)$
2. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, former une équation cartésienne de la droite D passant par $M_0(2,-1,3)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(1,3,-2)$.
3. Trouver un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite affine $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+3z-1 & = & 0 \\ x+y-4z-6 & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 2.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, donner une condition nécéssaire et suffisante pour que les droites $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} x & = & az-1 \\ y & = & 2z+3 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}'\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z-2 \\ y & = & 3z-1 \end{array}\right.$ soient coplanaires.

Exercice 3.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, déterminer $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'$ sachant que $\mathcal{D}$ passe par A et est dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}'$ passe par A' et est dirigée par $\overrightarrow{u}'$ dans les deux exemples suivants :

1. $A(2,1,0)$, $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$, $A'(0,2,1)$, $\overrightarrow{u}(2,-1,1)$
2. $A(2,0,1)$, $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$, $A'(-1,1,1)$, $\overrightarrow{u}(2,-1,1)$

Exercice 4.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, montrer que les deux droites $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2z+1 \\ y & = & z-1 \end{array}\right.$, $\mathcal{D}'\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z+2 \\ y & = & 3z-3 \end{array}\right.$ sont coplanaires et former une équation cartésienne de leur plan.

Exercice 5.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, soient $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z-1 \\ y & = & 2z+1 \end{array}\right.$, $\mathcal{D}'\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3x \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ montrer qu'il existe un couple unique de plans $(\mathcal{P},\mathcal{P}')$ tel que $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}$, $\mathcal{D}'\subset\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ parallèles, et former des équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Exercice 6.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, soient $\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+2 \\ z & = & x. \end{array}\right.$, $\mathcal{D}'\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+1 \\ z & = & 2x-1 \end{array}\right.$, trouver toutes les droites Δ de l'espace parallèles au plan d'équation cartésienne $z=0$ et intersectant $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et la droite d'équation cartésienne $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 7.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, déterminer toutes les droites Δ de l'espace rencontrant les droites

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} z & = & -1 \\ y & = & 2x+1 \end{array}\right., \mathcal{D}'\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ y & = & -x+3 \end{array}\right., \mathcal{D}''\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 2 \\ y & = & x+2 \end{array}\right.$$

et parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+y-z+2=0$.

Exercice 8.

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les points A de coordonnées $(1, 0, -2)$ et B de coordonnées $(0, 1, 1)$. On note aussi $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(1, -1, 1)$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par A dirigé par $\overrightarrow{u}$.

1. Donner l'équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}$ et B
2. Donner des équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$.
3. Donner de manière générale, l'équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$.

Exercice 9. (Théorème de Pappus)
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes du plan affine $\mathbb{R}^2$. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{D}$ et A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$, tous deux à deux distincts. On note $(AB') \cap (A'B) = C$", $(BC') \cap (B'C) = A$", $(AC') \cap (A'C) = B$" (on suppose que les droites et les points envisagés existent). Montrer que A", B" et C" sont alignés.

Exercice 10.
Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, soient A, B, C, D quatre points non coplanaires M, N, P, Q des points pris respectivement sur les droites (AB), (BC), (CD), (DA). Montrer que M, N, P, Q sont coplanaires si et seulement si :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$$

Exercice 11.
Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$" trois droites concourant en un point O, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$" trois plans paralleles, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'étant pas symétriques par rapport à O. on note :
A, B, C les points d'intersections respectifs de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$",
A', B', C' les points d'intersections respectifs de $\mathcal{P}'$ avec $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$",
A", B", C" les points d'intersections respectifs de $\mathcal{P}$" avec $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$",
et $(BC') \cap (B'C) = L$, $(CA') \cap (C'A) = M$, $(AB') \cap (A'B) = N$. Montrer que les droites $(LA$"), $(MB$"), $(NC$") sont concourantes ou parallèles.

Exercice 12.
Soient A_1, A_2, A_3, A_4, quatre points non coplanaires, et M un point de l'espace affine $\mathbb{R}^3$, On suppose que les plans (MA_1A_2) (resp. (MA_2A_3), resp. (MA_3A_4), resp. (MA_4A_1)) rencontre la droite (A_3A_4) (resp. (A_4A_1), resp. (A_1A_2), resp. (A_2A_3)) en un point B_1 (resp. B_2, resp. B_3, resp. B_4). Montrer que B_1, B_2, B_3, B_4 sont coplanaires.

Exercice 13.
Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, soient A, B, C, A', B', C' six points tels qu'il existe $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{c} A, B, C \text{ ne sont pas alignés} \\ \overrightarrow{u} \text{ n'appartient pas à la direction du plan } (ABC) \\ \overrightarrow{AA'} = \alpha \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{BB'} = \beta \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{CC'} = \gamma \overrightarrow{u}. \end{array} \right.$$

Montrer qu'il existe une droite parallèle aux trois plans $(A'BC)$, $(AB'C)$, (ABC') si et seulement si :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$