Université de Bourgogne Année 2019-2020

TD de Géométrie L2 – Feuille 2.

Exercice 1.
Soient A, B et C trois points non alignés du plan affine euclidien et a, b et c leurs affixes respectives.

1. Montrer que si $\frac{|a-b|}{|a-c|} = 1$ alors le triangle ABC est isocèle en A.
2. Montrer que si $\frac{a-b}{a-c}$ est imaginaire pur alors le triangle ABC est rectangle en A.
3. Montrer que si $\frac{a-b}{a-c} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ alors le triangle ABC est équilatéral.
4. Montrer que si $a + be^{\frac{2i\pi}{3}} + ce^{\frac{4i\pi}{3}} = 0$ alors le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 2.
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. On désigne par a, b, c les affixes respectives des sommets A, B et C. Montrer que le point H d'affixe $h = a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC (on rappelle que l'*orthocentre* est l'intersection des hauteurs).

Exercice 3.
Soient A, B, C et M quatre points du plan affine euclidien. On note A', B', C' les symétriques de M par rapport à (BC), (AC) et (AB) respectivement.

1. Montrer que l'orthocentre H de ABC, A', B' et C' sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Montrer que si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, alors les projections orthogonales de M sur les trois côtés du triangle sont alignés.

Exercice 4.
Soient A et B deux points du plan affine euclidien et k un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MB = k \cdot MA$

Exercice 5.
Soient A et B deux points du plan affine euclidien et θ un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit égal à θ modulo 2π.

Exercice 6.
Montrer que pour tout quadruplet de points (A, B, A', B') du plan affine euclidien tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe σ telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

Exercice 7.
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dont les affixes sont respectivement α, β, γ, α', β', γ'. Montrer que les deux triangles sont directement semblables si et seulement si

$$\alpha'(\beta - \gamma) + \beta'(\gamma - \alpha) + \gamma'(\alpha - \beta) = 0.$$

Exercice 8.
Soit σ une similitude directe et O et M deux points du plan affine euclidien. On considère la suite (M_n) définie par $M_0 = M$ et $M_{n+1} = \sigma(M_n)$. Déterminer les valeurs de la suite des longueur $u_n = OM_n$.

Exercice 9.
Soient (Γ) et (Γ') deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R'. Déterminer l'ensemble des centres Ω des similitudes directes σ telles que $\sigma(\Gamma) = \Gamma'$. Préciser les centres des homothéties qui transforment (Γ) en (Γ').

Exercice 10.

1. Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z vérifiant :
$$|(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z - \sqrt{3} - \mathrm{i}| = 4.$$
2. Déterminer la similitude σ transformant A d'affixe i en O d'affixe 0 et B d'affixe $\sqrt{3}$ en B' d'affixe $-4\mathrm{i}$.
3. En utilisant les deux questions précédentes, retrouver l'ensemble (C).

Exercice 11.
Soit (p, q, r, s) un quadruplet de réels vérifiant $p^2 + q^2 \neq 0$, et $a = p + \mathrm{i}q$ et $b = r + \mathrm{i}s$.

1. Donner une condition pour que la similitude directe σ qui transforme un point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ en un point M' d'affixe $z' = az + b$ admette au moins un point fixe Ω. Déterminer ce point fixe s'il est unique.
2. Montrer que les points M qui sont alignés avec O et M' ont une affixe $z = x + \mathrm{i}y$ telle que $q(x^2+y^2) = cy - dx$. Que peut-on dire de l'ensemble des points M vérifiant cette égalité ? Montrer que cette ensemble contient O.
3. En déduire les similitudes directes telles que tout point M soit aligné avec O et M'.
4. Quelles sont les similitudes directes égales à leur inverse ?

Exercice 12.
Montrer que pour tout cercle (Γ) du plan de centre O et de rayon R et pour tout point M et pour toute droite passant par M intersectant (Γ) en deux points A et B distincts ou confondus, on a l'égalité suivantes :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 = R^2.$$

Exercice 13. Théorème de Ptolémé
Montrer qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Exercice 14. Théorème de Napoléon
Soient ABC un triangle et M_1, M_2 et M_3 des points extérieurs au triangle ABC et tels que les triangles ABM_1, BCM_2 et ACM_3 soient équilatéraux. On note Ω_1, Ω_2 et Ω_3 les centres de gravité respectifs des trois triangles ABM_1, BCM_2 et ACM_3. Montrer que le triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ est équilatéral.