Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques

Licence 3
UE LMo6C : Algèbre 2

Feuille de TD n°4

Exercice 1. Soit G un groupe qui opère sur un ensemble X. On note :

- ⋆ $\mathcal{O}_x = G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\} \subset X$ l'orbite de $x \in X$;
- ⋆ $X^g = \mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\} \subset X$ l'ensemble des points fixes de $g \in G$;
- ⋆ $G_x = \mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} < G$ le stabilisateur de $x \in X$.

1. Soient x et y deux points de G dans la même orbite. On suppose que $y = h \cdot x$. Quel est le lien entre G_x et G_y ? Que peut-on dire de leurs cardinaux ?
2. Pour $x \in X$, soit $\phi_x : G \to X$ l'application définie par $g \mapsto \phi_x(g) = g \cdot x$.
   (a) Montrer que pour $x \in X$, G/G_x est en bijection avec $\mathcal{O}_x$.
   (b) En déduire $\mathrm{card}(\mathcal{O}_x)$ si G est fini.

On suppose dorénavant que X et G sont finis. Soit N le nombre d'orbites de l'action et $x_1, \ldots, x_N$ un point dans chaque orbite.

3. Montrer que : $\mathrm{card}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$. Que devient cette formule lorsque $X = G$ pour l'action par conjugaison $g \cdot x = gxg^{-1}$ (**formule de classes**) ?
4. On suppose G et X finis et on considère $E = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\} \subset G \times X$.
5. En considérant les deux projections $\pi_1 : E \to G$ et $\pi_2 : E \to X$, montrer que :
$$\mathrm{card}(E) = \sum_{g \in G} \mathrm{card}(X^g) = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{i=1}^{N} |G_{x_i}| \,\mathrm{card}(\mathcal{O}_{x_i}).$$
6. En déduire la **formule de Burnside** (le nombre moyen de points de X fixés par les éléments de G est égal au nombre d'orbites) :
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{card}(X^g).$$

Exercice 2. **Lemme de Cauchy**. Soit G un groupe d'ordre n et p un diviseur premier de n. **On montre que G a un élément d'ordre p.** On considère sur $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p \mid x_1 x_2 \ldots x_p = 1\}$ l'action par permutation circulaire : $\mathbb{Z}/p \times X \to X, \quad k.(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+p})$ (les indices étant entendus mod. p).

1. Calculer $\mathrm{card}(X)$.
2. Quels sont les éléments de X dont l'orbite est réduite à un point ?
3. Montrer que si G n'a pas d'élément d'ordre p alors p divise $\mathrm{card}(X) - 1$. En déduire une contradiction.

Exercice 3. On appelle p-groupe un groupe dont le cardinal est une puissance non nulle d'un nombre premier p.

1. Soit G un p-groupe. On suppose que G agit sur un ensemble X fini et on note I l'ensemble des points invariants de X sous G i.e $\{x \in X \mid \forall g \in G,\ g.x = x\}$. Montrer que $|X| \equiv |I| \pmod p$.
2. En déduire que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à $\{e\}$ (faire agir G sur lui-même par automorphismes intérieurs) puis que si G n'est pas abélien, l'indice du centre est divisible par p^2 (p premier).

Exercice 4. Soit G un groupe fini de $SO_3(\mathbb{R})$. On note $X = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \exists g \in G \setminus \{\mathrm{id}\},\ g(x) = x\} \subset \mathbb{S}^2$ où $\mathbb{S}^2$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (pour la métrique euclidienne usuelle).

1. Montrer que G agit sur X et déterminer $\mathrm{card}(X^g)$ pour chaque $g \in G$.
2. On note N le nombre d'orbites de l'action de G sur X, et $x_1, \ldots, x_N$ un point dans chaque orbite. En utilisant l'exercice 2, montrer que :
$$2\Big(1 - \frac{1}{|G|}\Big) = \sum_{i=1}^{N}\Big(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\Big)$$
3. En déduire que N ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3.
4. Déterminer G lorsque $N = 2$.
5. Montrer que lorsque $N = 3$, on est dans un des quatre cas suivants :

	$\lvert G_{x_1}\rvert$	$\lvert G_{x_2}\rvert$	$\lvert G_{x_3}\rvert$	$\lvert G\rvert$
cas 1	2	2	n	$2n$
cas 2	2	3	3	12
cas 3	2	3	4	24
cas 4	2	3	5	60

6. Reconnaître dans chaque cas la configuration des points de X et déterminer G.

Solution de l'exercice 4.

1. G agit sur $\mathbb{S}^2$.
Soit $h \in G$ et $x_0 \in X = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \exists g \in G\setminus\{\mathrm{id}\},\ g(x) = x\}$. Il existe $g \in G\setminus\{\mathrm{id}\}$ tel que $g(x_0) = x_0$. Mais alors $hgh^{-1}(h(x_0)) = h(x_0)$ et $hgh^{-1} \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ donc $h(x_0) \in X$. Ainsi G agit sur X.
En outre, les éléments de $G \setminus \{\mathrm{id}\}$ sont des rotations (de centre O) donc fixent exactement deux points de $\mathbb{S}^2$. Ainsi $\mathrm{card}(X^g) = 2$ si $g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$. Si $g = \mathrm{id}$, $\mathrm{card}(X^{\mathrm{id}}) = \mathrm{card}(X)$.

2. Soit $S = \{(g, x) \in G \times X \mid g(x) = x\}$. La formule de Burnside (exercice 1) donne :
$$\mathrm{card}(S) = \sum_{g\in G}\mathrm{card}(X^g) = N|G|$$
c'est à dire :
$$\mathrm{card}(S) = \mathrm{card}(X^{\mathrm{id}}) + \sum_{g\in G\setminus\{id\}}\mathrm{card}(X^g) = \mathrm{card}(X) + 2(|G| - 1) = N|G|$$
Or $\mathrm{card}(X) = \sum_{i=1}^{N}\mathrm{card}(\mathcal{O}_{x_i})$ et $\mathrm{card}(\mathcal{O}_{x_i}) = [G : G_{x_i}]$ donc :
$$\sum_{i=1}^{N}[G : G_{x_i}] + 2(|G| - 1) = N|G| \qquad \text{ou encore} \qquad 2(|G| - 1) = \sum_{i=1}^{N}\Big(|G| - \frac{|G|}{|G_{x_i}|}\Big)$$
D'où la formule :
$$(*) \qquad 2\Big(1 - \frac{1}{|G|}\Big) = \sum_{i=1}^{N}\Big(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\Big)$$

3. Par définition de X, chaque G_{x_i} contient id et un autre élément de G, donc $|G_{x_i}| \geq 2$. De $(*)$ on tire :
$$\frac{N}{2} \leq \sum_{i=1}^{N}\Big(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\Big) = 2\Big(1 - \frac{1}{|G|}\Big) < 2$$
Si $N = 1$, la relation conduit à $|G| = |G_{x_1}|(2 - |G|)$ donc $G = \{\mathrm{id}\}$ et X est vide, cas trivial inintéressant. Donc $N = 2$ ou $N = 3$.

4. Si $N = 2$, comme $|G_{x_1}|$ et $|G_{x_2}|$ divisent $|G|$, on obtient de $(*)$ que $|G_{x_1}| = |G_{x_2}| = |G|$ et donc $G_{x_1} = G_{x_2} = G$. Donc $G =< r >\simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (si $|G| = p$) où r est une rotation d'axe (x_1x_2) (x_1 et x_2 sont nécessairement diamétralement opposés) d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

5. Si $N = 3$, notons $p_1 = |G_{x_1}|$, $p_2 = |G_{x_2}|$, $p_3 = |G_{x_3}|$ et $p = |G|$. p_1, p_2, p_3 sont au moins égaux à 2 et divisent p. On obtient de $(*)$ que :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{2}{p} = 1$$

Si $p_3 \geq p_2 \geq p_1 \geq 3$, alors p est négatif donc $\boxed{p_1 \text{ vaut } 2}$. On est ramené à :

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{2}{p} = \frac{1}{2}$$

Si $p_3 \geq p_2 > 3$ alors p est négatif donc $\boxed{p_2 \text{ vaut } 2 \text{ ou } 3}$.
Si $p_2 = 2$ alors $2p_3 = p$. (cas 1 du tableau)
Si $p_2 = 3$ alors on se trouve dans les trois derniers cas du tableau.

6. On voit se réaliser chacun des cas, correspondant aux groupes de symétries
   — d'un "diamant" symétrique : c'est le cas où G est groupe diédral $D_p =< r, s >$ où r est une rotation d'angle $2\pi/p$ d'axe Δ et s une rotation d'angle π d'axe contenu dans le plan orthogonal à Δ .
   — d'un tétraèdre régulier pour le cas 2
   — d'un cube (ou d'un octaèdre régulier) pour le cas 3
   — d'un dodécaèdre (ou d'un icosaèdre) régulier pour le cas 4.

Exercice 5. Soit $\mathscr{C}$ un cube dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}^3$ de dimension 3. On note $G = \mathrm{Is}_+(\mathscr{C})$ le groupe des isométries affines de $\mathscr{E}^3$ conservant l'orientation et laissant le cube $\mathscr{C}$ invariant. Soit $X = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ l'ensemble des diagonales de $\mathscr{C}$ (joignant deux sommets opposés).

1. Montrer que G agit sur X. En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ (déterminer géométriquement tous les éléments de G et leur correspondance avec les éléments de $\mathfrak{S}_4$).
2. En utilisant la formule de Burnside, calculer le nombre cubes différents obtenus en colorant chaque face avec une des six couleurs de l'arc en ciel (violet, bleu, vert, jaune, orange, rouge). Généraliser avec n couleurs.

Solution de l'exercice 5. Pour fixer les notations, les sommets du cube sont notés H_1, H_2, H_3, H_4, B_1, B_2, B_3 et B_4, $H_1H_2H_3H_4$, étant une face (face supérieure), $B_1B_2B_3B_4$, la face opposée (face inférieure), les diagonales joignant les sommets opposés étant $d_1 = (H_1B_1)$, $d_2 = (H_2B_2)$, $d_3 = (H_3B_3)$, $d_4 = (H_4B_4)$.

1. Les isométries sont affines donc conservent l'isobarycentre du cube (son centre) et l'alignement. Comme en plus elles sont bijectives, elles envoient une droite sur une droite. Les sommets sont les points extrêmes du cube (à distance maximale du centre) donc comme les isométries conservent les distances, elles envoient les sommets sur les sommets et donc les diagonales (droites joignant les sommets au centre) sur les diagonales. Ainsi, G agit sur les diagonales de $\mathscr{C}$.
   Les isométries positives fixant le point O sont des rotations d'axe passant par O (axe propre pour la valeur propre 1) et l'identité. En voici l'inventaire.
   — L'identité fixe d_1, d_2, d_3 et d_4.
   — Les rotations d'ordre 4 d'axes passant par les centres de deux faces opposées (d'angle de mesure $\pm\frac{\pi}{4}$ pour une orientation de l'axe fixée) : il y en a deux par axe avec trois axes, qui correspondent aux trois couples de 4-cycles inverses l'un de l'autre :

$$(d_1\, d_2\, d_3\, d_4) \text{ et } (d_4\, d_3\, d_2\, d_1)\ ;\ (d_1\, d_3\, d_2\, d_4) \text{ et } (d_4\, d_2\, d_3\, d_1)\ ;\ (d_1\, d_2\, d_4\, d_3) \text{ et } (d_3\, d_4\, d_2\, d_1)$$

— Les rotations d'ordre 2 (demi-tours) d'axes passant par les centres de deux faces opposées, qui sont les trois carrés des précédentes, correspondent aux doubles transpositions :

$$(d_1, d_3)(d_2, d_4)\ ;\ (d_1, d_2)(d_3, d_4)\ ;\ (d_1, d_4)(d_2, d_3).$$

— Les rotation d'ordre 3 d'axe une des quatre diagonales (d'angle de mesure $\pm\frac{2\pi}{3}$ pour une orientation de la diagonale donnée) : il y en a deux par diagonale avec quatre diagonales, qui correspondent aux 8 couples de 3-cycles inverses l'un de l'autre :

$$(d_1, d_3, d_4) \text{ et } (d_4, d_3, d_1)\ ;\ (d_2, d_1, d_4) \text{ et } (d_4, d_1, d_2)\ ;$$

$$(d_2, d_3, d_1) \text{ et } (d_1, d_3, d_2)\ ;\ (d_2, d_3, d_1) \text{ et } (d_1, d_3, d_2).$$

— Les six rotations d'ordre 2 d'axes les six droites passant par les milieux des couples d'arêtes opposées, qui correspondent aux six transpositions

$$(d_1, d_2)\ ;\ (d_1, d_3)\ ;\ (d_1, d_4)\ ;\ (d_2, d_3)\ ;\ (d_2, d_4)\ ;\ (d_3, d_4).$$

On a au total $1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24 = 6!$ isométries.

2. On considère X l'ensemble des coloriages du cube : un coloriage est une application de l'ensemble $\mathscr{F}$ des faces du cube à valeurs dans les couleurs $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On fait agir $G = \mathrm{Is}_+(\mathscr{C})$ sur X : soit une isométrie du cube $g \in G$ et un coloriage $c \in X$ ($c : \mathscr{F} \to \Gamma$) alors $g \circ c : \mathscr{F} \to \Gamma$ est un autre coloriage. Un point fixe de g est une coloriage c tel que $g \circ c = c$.

   (a) Pour l'identité, tout coloriage est fixe, on peut choisir arbitrairement une couleur par face soit 6^6 possibilités (pour n couleurs, n^6 cas).

   (b) Pour les six rotations d'ordre 4, on peut choisir arbitrairement les couleurs des deux faces perpendiculaires à l'axe et une unique couleur pour les quatre autres soit $6^3 \times 6$ possibilités (pour n couleurs, $n^3 \times 6$ cas).

   (c) Pour les trois demi-tours carrés des précédents, on peut choisir arbitrairement les couleurs des deux faces perpendiculaires à l'axe et deux couleurs pour les quatre autres (une même couleur pour deux faces opposées) soit $6^4 \times 3$ possibilités (pour n couleurs, $n^4 \times 3$ cas).

   (d) pour les huit rotations d'ordre 3 d'axes d_i, on peut choisir arbitrairement une même couleur des trois faces se rencontrant au sommet H_i, et une couleur pour celle qui se rencontrent au sommet B_i. On doit donc choisir deux couleurs soit $6^2 \times 8$ possibilité (pour n couleurs : $n^2 \times 8$ cas).

   (e) pour les six rotations d'ordre 2 d'axes les six droites passant par les milieux des couples d'arêtes opposées, on peut choisir arbitrairement une même couleur pour les deux faces opposées parallèles à l'axe et une couleur pour les deux couples de faces ayant un point de l'axe en commun sur leur bord, soit trois couleurs donc $6^3 \times 6$ possibilité (pour n couleurs : $n^3 \times 6$ cas).

   La formule de Burnside donne le nombre d'orbites (i.e. de coloriages possibles) N pour six couleurs :

$$N = \frac{1}{24}(6^6 + 6^3 \times 6 + 6^4 \times 3 + 6^2 \times 8 + 6^3 \times 6) = 2226$$

   et pour n couleurs :

$$N = \frac{n^2}{24}(n^4 + 3n^2 + 12n + 8)$$

   (on remarque que $n^2(n^4 + 3n^2 + 12n + 8)$ est bien toujours divisible par 24).

Exercice 6. Utiliser la formule de Burnside pour dénombrer tous les colliers circulaires de 10 perles que l'on peut faire avec 3 couleurs de perles : on peut ne pas utiliser toutes les couleurs dans un même collier, et on ne met pas de restriction sur le nombre de perles de chaque couleur. On remarque que l'on peut tourner ou retourner un collier, c'est toujours le même !
Même question pour un collier de 11 perles.
(Indication : supposons avoir numéroté mentalement les perles suivant l'ordre d'enfilage. Un collier est

représenté par un polygone régulier dont les sommets sont les perles. On fait agir le groupe des symétries du polygone : deux colliers dans la même orbite sont identiques. Généraliser aux cas n perles et k couleurs en distinguant n pair et n impair).

Solution de l'exercice 6. n perles et k couleurs : le nombre de collier est le nombre d'orbites dans l'action du groupe $D_n =< r, s >$ des symétries du polygone n sommets, r étant la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s une réflexion d'axe passant par un sommet et le centre (isobarycentre) du polygone.

1. Pour $n = 10$ et $k = 3$, les ordres des éléments de $< r >$ sont 1, 2, 5 et 10. il y a :
   - une rotation d'ordre 1 (id, qui donne 3^{10} choix de couleurs (10 perles);
   - $\varphi(2) = 1$ rotation d'ordre 2 (r^5), qui donne 3^5 choix de couleurs (5 perles);
   - $\varphi(5) = 4$ rotations d'ordre 5 (r^2, r^4, r^6, r^8) qui donnent chacune 3^2 choix de couleurs (2 perles);
   - $\varphi(10) = \varphi(2)\varphi(5) = 4$ rotations d'ordre 10 (r, r^3, r^7, r^9) qui donnent chacune 3 choix de couleurs (1 perles);

   Pour les réflexions, il y a
   - 5 réflexions d'axes passant par deux sommets opposés (s,r^2s,r^4s,r^6s,r^8s) qui donnent chacune 3^6 choix de couleurs ($6 = 4 + 2$ perles);
   - 5 réflexions d'axes passant par deux les milieux de deux arêtes opposées (rs,r^3s,r^5s,r^7s,r^9s), qui donnent chacune 3^5 choix de couleurs (5 perles).

   Soit en tout
   $$\frac{1}{20}(1 \times 3^{10} + 1 \times 3^5 + 4 \times 3^2 + 4 \times 3 + 5 \times 3^6 + 5 \times 3^5) = 3210.$$
2. Pour $n = 11$ et $k = 3$, il y a :
   - une rotation d'ordre 1 (id, qui donne 3^{11} choix de couleurs (11 perles);
   - $\varphi(11) = 10$ rotations d'ordre 11 (r^{11}), qui donnent chacune 3 choix de couleurs (1 perles);

   Pour les réflexions, il y a
   - 11 réflexions d'axes passant par un sommet et le milieu de l'arête opposée qui donnent chacune 3^6 choix de couleurs ($6 = 5 + 1$ perles);

   Soit en tout
   $$\frac{1}{22}(1 \times 3^{11} + 10 \times 3 + 11 \times 3^6) = 8418.$$
3. Cas général : le nombre de colliers de n perles de k couleurs est :
   $$N = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n} \varphi(d) \times k^{\frac{n}{d}} + n \times k^{\frac{n+1}{2}}\right) \quad \text{si } n \text{ impair}$$
   $$N = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n} \varphi(d) \times k^{\frac{n}{d}} + \frac{n}{2} \times k^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \times k^{\frac{n+2}{2}}\right) \quad \text{si } n \text{ pair.}$$