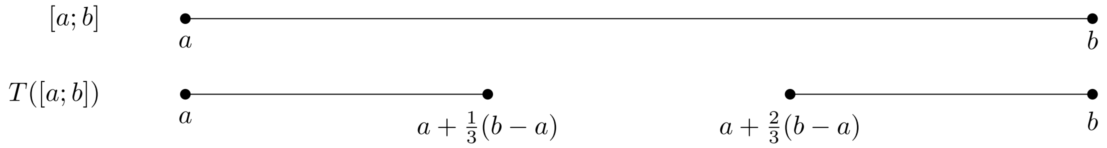
L3 de math. - Ensemble triadique de Cantor -

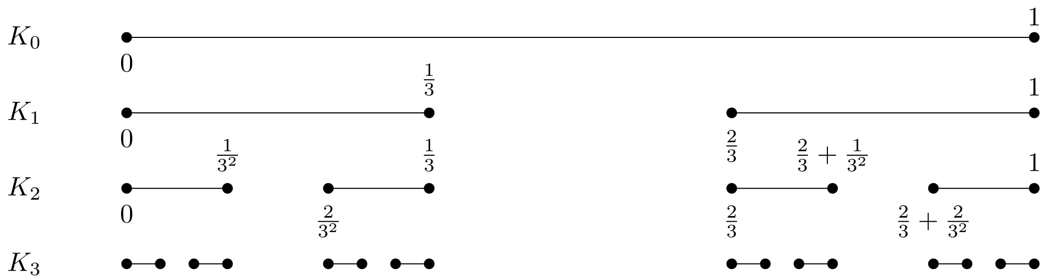
Pour un intervalle $[a;b]$, notons $T([a;b]) = [a;b] \setminus \left]a+\frac{1}{3}(b-a); b-\frac{1}{3}(b-a)\right[$ l'opération qui consiste à "évider $[a;b]$ de son tiers milieu".



On définit par récurrence la suite de compacts emboités $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$K_0 = [0;1] \qquad \text{et si} \quad K_n = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_{n,k}, b_{n,k}] \quad \text{alors} \quad K_{n+1} = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} T([a_{n,k}, b_{n,k}]) = \bigsqcup_{k=1}^{2^{n+1}} [a_{n+1,k}, b_{n+1,k}]$$

où pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $(a_{n,k})_{1\leq k\leq 2^n}$ est croissante et $b_{n,k} = a_{n,k} + \frac{1}{3^n}$.



L'*ensemble triadique de Cantor* est l'intersection $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. C'est un compact de $[0;1]$ (intersection de compacts). En voici une description :

1. Notons tout d'abord que K contient le bord ∂K_n de chaque K_n, $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \partial K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{1\leq k\leq 2^n} \{a_{n,k}, b_{n,k}\} \subset K.$$

2. On montre par une récurrence élémentaire que

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{3^i} \ , \ \frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{3^i} : (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0;2\}^n \right\}.$$

Comme $\displaystyle\frac{1}{3^n} = \sum_{i\geq n+1} \frac{2}{3^i}$, on peut aussi décrire E comme étant l'ensemble des réels qui s'écrivent sous la forme : $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_i}{3^i}$ où $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $\{0,2\}$ constante à partir d'un certain rang, les points $a_{n,k}$ correspondant à la constante 0, les points $b_{n,k}$ à la constante 2.

3. De plus, $K = \overline{E}$. En effet, $\overline{E} \subset K$ car K est fermé et contient E, et si $x \in K$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x \in \displaystyle\bigcap_{\ell=0}^{n} K_\ell$ donc x est contenu dans une unique suite de segments emboités

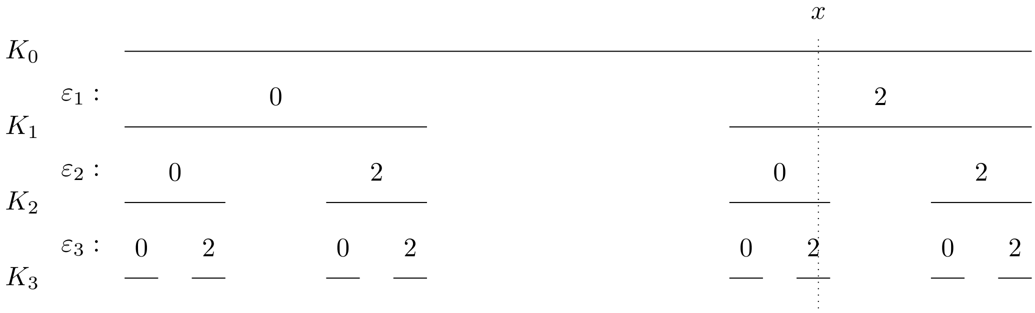
$$[0;1] = [a_{0,k_0}; b_{0,k_0}] \supset [a_{1,k_1}; b_{1,k_1}] \supset [a_{2,k_2}; b_{2,k_2}] \supset \cdots \supset [a_{n,k_n}; b_{n,k_n}]$$

Les suites $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E sont (strictement) adjacentes de limite x, ce qui prouve que $x \in \overline{E}$. D'après la description de E ci-dessus, dire que $K = \overline{E}$ se traduit par :

$$K \text{ est l'ensemble des nombres réels } x = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{3^n} \text{ où } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de } \{0;2\}$$

(sans restriction sur la suite cette fois).

On peut visualiser la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par le codage suivant : si $x \in [a_{n,k_n}; b_{n,k_n}]$, alors $\varepsilon_n = 0$ si k_n est impair et 2 si k_n est pair.
Dans la figure ci-dessous, $x = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$:



Propriétés de l'ensemble de Cantor K.

1. K est compact (on l'a vu plus haut).
2. K n'est pas dénombrable. En considérant les deux applications respectivement bijective et surjective :
$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\simeq} & \{0;1\}^{\mathbb{N}^*} & \twoheadrightarrow & [0;1] \\ x = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{3^n} & \longmapsto & \left(\frac{\varepsilon_n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}} \end{array}$$
$K = \left\{ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{3^n} : \forall n \in \mathbb{N}^* \ \varepsilon_n \in \{0,2\} \right\}$ s'envoie surjectivement sur $[0;1] = \left\{ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}} : \forall n \in \mathbb{N}^* \ \varepsilon_n \in \{0,2\} \right\}$.
Donc K a le cardinal de $\mathbb{R}$.
3. K n'a aucun point isolé.
Tout point de K est limite de deux suites strictement adjacentes de K comme on l'a vu plus haut, donc ne peut-être isolé.
4. K est totalement discontinu.
Soient x et $y = x + h$ dans K, $h > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[a_n; b_n]$ la composante connexe de K_n contenant x et $[a'_n; b'_n]$ celle contenant $y = x + h$. Si $3^n > \frac{2}{h}$, alors on a :
$$a_n \leq x \leq b_n < a'_n \leq y \leq b'_n$$
Mais dans l'intervalle $]b_n; a'_n[$, il y a un point qui n'est pas dans K (donc x et y ne peuvent être dans une même composante connexe).

Propriété spécifique de l'ensemble triadique de Cantor K : K est négligeable (il est contenu dans un ensemble de longueur arbitrairement petite).
$$K \subset K_n = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} [a_{n,k}, b_{n,k}] \qquad \text{et} \qquad \ell(K_n) := \sum_{k=1}^{2^n} \ell([a_{n,k}, b_{n,k}]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
Pour $A \subset \mathbb{R}$, notons $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice (ou caractéristique) de A, définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon.
Alors $\mathbb{1}_K = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{K_n}$. Comme K est fermé, tout point $x \notin K$ a un voisinage sur lequel $\mathbb{1}_K$ est nulle. Donc l'ensemble des discontinuités de $\mathbb{1}_K$ est contenu dans K (c'est en fait K lui-même, puisque K est totalement discontinu).
Or pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{K_n}$ est en escalier, $0 \leq \mathbb{1}_K \leq \mathbb{1}_{K_n}$ et :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbb{1}_{K_n}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \ell(K_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$
On en déduit que :

L'indicatrice de l'ensemble **triadique** de Cantor est Riemann-intégrable sur $[0;1]$ et son intégrale est nulle.

Remarque. Pour passer de K_n à K_{n+1} on retire 2^n intervalles ouverts de longueur $\frac{1}{3^{n+1}}$. La même construction consistant à retirer cette fois 2^n intervalles de longueur $\frac{1-\ell_0}{3^{n+1}}$ avec $\ell_0 \in [0,1[$ conduirait à un autre ensemble de Cantor (compact, non dénombrable, sans point isolé, totalement discontinu) mais cette fois non négligeable si $\ell_0 > 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbb{1}_{K_n}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \ell(K_n) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1-l_0}{3} - 2\frac{1-l_0}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{1-l_0}{3^n}\right] = \ell_0.$$
Dans ce cas, l'indicatrice de ce Cantor n'est plus Riemann-intégrable ! Il semble pourtant naturel de dire que son intégrale est ℓ_0. On verra qu'elle est Lebesgue-intégrable, d'intégrale égale à ℓ_0.