Chapitre 4

Le théorème de convergence dominée

4.0 Rappel des théorèmes de convergence précédents

Pour des suites de fonctions positives, on a vu le théorème de convergence croissante, essentiel dans la construction de l'intégrale, et son corollaire immédiat sur les séries de fonctions positives.

Théorème: Théorème de convergence croissante ou de Beppo Levi

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **croissante** de fonctions mesurables **positives** sur l'espace mesuré $(X,\mathscr{M},\mu)$. Alors $f=\sup_n f_n = \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} f_n$ est mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow}\int f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

Corollaire: Théorème d'interversion de $\int$ et $\sum$

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables **positives** sur l'espace mesuré $(X,\mathscr{M},\mu)$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable positive et $\displaystyle\int\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

Le théorème de convergence croissante se décline en un autre corollaire donnant le cas de la convergence décroissante. **Mais pour ce dernier cas, on a besoin d'une hypothèse de domination** : une des fonctions f_{n_0} de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit avoir une intégrale finie, ce qui induit la finitude des intégrales de toutes fonctions les suivantes, puisque f_{n_0} les domine !

Corollaire: Théorème de convergence décroissante

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **décroissante** de fonctions mesurables **positives** sur l'espace mesuré $(X,\mathscr{M},\mu)$. Alors $f=\inf_n f_n = \lim_{n\to+\infty}{}^{\downarrow} f_n$ est mesurable **positive** et s'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que f_{n_0} est intégrable alors $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow}\int f_n\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.*

Afin d'avoir un théorème analogue pour des suites non nécessairement monotones, de fonctions non nécessairement positives, on est tenter d'utiliser les limites inférieure et supérieure qui sont respectivement des limites croissantes et décroissantes :

Nota Bene

On rappelle qu'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$-\infty < \liminf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{p\to+\infty}\uparrow \inf_{n\geq p} u_n = \lim_{p\to+\infty}\downarrow \sup_{n\geq p} u_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} u_n < +\infty$$

et la valeur commune est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* * * * * * * * * *

La limite inférieure est la plus petite valeur d'adhérence et limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'égalité des deux signifie qu'il y a une unique valeur d'adhérence : la limite de la suite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On a justement vu un corollaire du théorème de Beppo Levi pour les limites inférieures :

Lemme: Fatou-Lebesgue

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables **positives** sur l'espace mesuré $(X\mathscr{M},\mu)$. Alors $\liminf_n f_n$ est mesurable positive et :*

$$\int \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

4.1 Le théorème de convergence dominée

En utilisant judicieusement les remarques du paragraphe précédent, on obtient le théorème suivant, qui suppose uniquement une convergence **simple** :

Théorème 4.1.1: Théorème de convergence dominée de Lebesgue

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X\mathscr{M},\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge **simplement** -p.p. (pour μ) vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction **intégrable** positive $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dite **dominante**, telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |f_n| \leq g$ -p.p. Alors :*

1. *f et f_n sont intégrables (pour tout $n \in \mathbb{N}$)*
2. *$\lim_n \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ (autrement dit $\|f - f_n\|_1 \to 0$ lorsque $n \to +\infty$)*
3. *$\lim_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$*

Voir la démonstration (page 93)

Corollaire 4.1.2: Séries d'intégrales

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré* $(X\mathscr{M},\mu)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Si* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ *alors les fonctions* u_n, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ *et* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ *sont intégrables et*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\,\mathrm{d}\mu$$

Voir la démonstration (page 95)

4.2 Conséquences du théorème de convergence dominée

Le théorème de convergence dominée concerne des suites de fonctions, l'indice est un paramètre entier. La continuité étant équivalente à la continuité séquentielle dans $\mathbb{R}$ ou dans un espace métrique, on généralise facilement le théorème de convergence dominée à la continuité des intégrales à paramètre.

Théorème 4.2.1: Théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Soient $(X,\mathscr{M},\mu)$ *un espace mesuré,* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $a\in I$ *et* $f : X\times I \to \mathbb{R}$ *une fonction* ($x\in X$ *est la variable d'intégration et* $t\in I$ *le paramètre réel). On assimile cette fonction* f *à la famille* $(f_t)_{t\in I}$ *à un paramètre en posant* $f(x,t)=f_t(x)$. *On suppose que* f *satisfait les hypothèses :*

1. ***Continuité par rapport au paramètre*** t *: pour* (μ) *presque tout* $x\in X$,

$$\begin{array}{rcl} f(x,\cdot) : I & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x,t) \end{array} \qquad \text{est continue en } a\,;$$

2. ***Mesurabilité par rapport à la variable d'intégration*** x *: pour tout* $t\in I$,

$$\begin{array}{rcl} f(\cdot,t) = f_t : X & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,t) \end{array} \qquad \text{est mesurable sur } X\,;$$

3. ***Domination*** *: il existe une fonction* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *intégrable telle que :* $\forall t\in I\ |f_t|\leq g$ *-p.p.*

Alors f_t *est intégrable pour tout* $t\in I$ *et* $F(t)=\displaystyle\int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ *est continue en* a.

* * * * * * * * * *

— *On a un résultat analogue avec la continuité à droite ou à gauche ;*
— *On peut tout à fait généraliser à la continuité dans un espace métrique : il suffit de remplacer* I *par un espace métrique, ou un ouvert d'un espace métrique.*

Exercice 4.2.2

Soit fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. On pose :
$$F(x) = \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que c'est encore vrai en remplaçant λ par une mesure μ telle que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.2.3: Théorème de dérivation (global) des intégrales à paramètre

Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. *pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable par rapport à t de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$*
2. *pour tout $t \in I$, $f(\cdot,t) = f_t$ est* ***intégrable***
3. *il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $t \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)\right| \leq g$ -p.p..*

Alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ est intégrable pour tout $t \in I$, $F(t) = \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable en t et :
$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Voir la démonstration (page 97)

Remarque 4.2.4

1. Il existe une version locale (dérivée en un point t_0) en demandant uniquement l'exitence de $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ et en remplaçant la condition de domination par
$$\text{pour presque tout } x \in X, \qquad |f(x,t) - f(x,t)| \leq g(x)|t - t_0|.$$
2. On peut généraliser aux dérivées d'ordre supérieur (exercice).
3. On peut aussi généraliser en remplaçant I par un ouvert de $\mathbb{R}^p$ en utilisant les dérivées directionnelles notamment les dérivées partielles.
4. Le corollaire 4.1.2 permet quant à lui de traiter le cas des fonctions analytiques (c'est à dire localement développables en séries entières)

Les démonstrations du chapitre 4

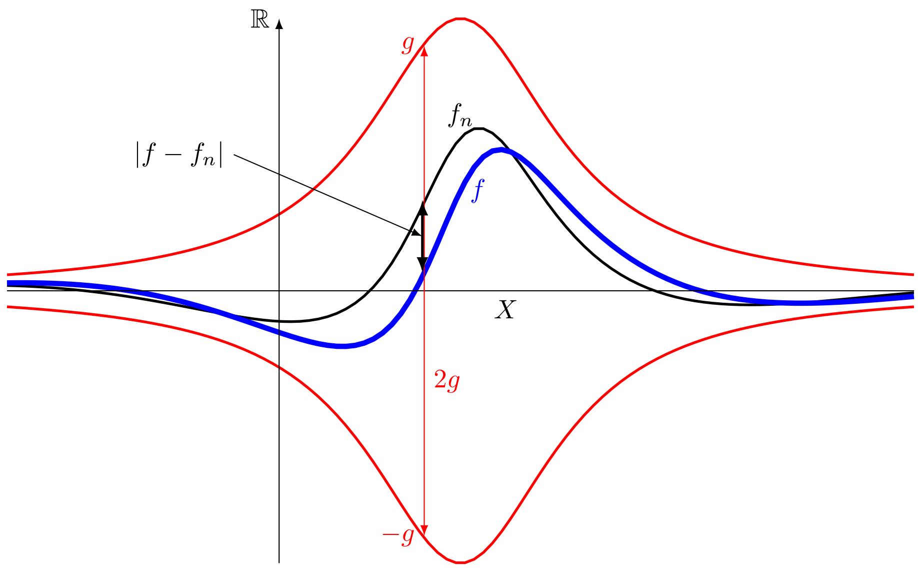
Théorème: Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X\mathscr{M},\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge ***simplement*** *-p.p. (pour μ) vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction* ***intégrable*** *positive g, dite* **dominante**, *telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |f_n| \leq g$ -p.p.. Alors :*

1. *f et f_n sont intégrables (pour tout $n \in \mathbb{N}$)*
2. $\lim\limits_{n} \displaystyle\int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$
3. $\lim\limits_{n} \displaystyle\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$

Démonstration. *Retour page 90*

1. *Dans un premier temps, on suppose que pour tout $x \in X$: $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$. On a alors $|f(x)| \leq g(x)$. Notons $f_\infty = f$.*



On a les propriétés suivantes :

- f *est mesurable comme limite de fonctions mesurables*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$(|f_n| \leq g) \Longrightarrow \left(\int |f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right)$$

  donc f_n *est intégrable. En particulier, pour* $n = \infty$, f *est intégrable.*
- *On pose* $h_n = 2g - |f - f_n|$. *On a :*

$$h_n \geq 0 \qquad \textit{et} \qquad \liminf_n h_n = 2g - \limsup_n |f - f_n| = 2g - \lim_n |f - f_n| = 2g$$

- *En appliquant le lemme de Fatou à* (h_n) *on obtient :*

$$\int 2g \,\mathrm{d}\mu = \int \liminf_n h_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int h_n \,\mathrm{d}\mu = \int 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

  Comme $\displaystyle\int 2g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, *on trouve :* $\displaystyle\limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq 0$ *donc*

$$\limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- *Enfin :* $0 \leq \left| \displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \displaystyle\int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$ *donc* $\displaystyle\lim_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

2. *Soient* N_n *un ensemble de mesure nulle en dehors duquel* g *majore* $|f_n|$, *et* N *un ensemble de mesure nulle en dehors duquel* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f. *Alors* $\mu\Big(N \cup \displaystyle\bigcup_n N_n\Big) = 0$.

   On note $U = \Big(N \cup \displaystyle\bigcup_n N_n\Big)^c$ *et on remplace* f_n *par* $\tilde{f}_n = f_n . \mathbb{1}_U$ *et* f *par* $\tilde{f} = f . \mathbb{1}_U$. *On a :*

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \tilde{f}_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \int f \,\mathrm{d}\mu = \int \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu \qquad \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \int |\tilde{f} - \tilde{f}_n| \,\mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Corollaire: Séries d'intégrales

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré* $(X\mathscr{M},\mu)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Si* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ *alors les fonctions* u_n, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ *et* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ *sont intégrables et*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\,\mathrm{d}\mu$$

Démonstration. Retour page 91
On pose $g = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$ *et* $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$*. Alors l'hypothèse et le théorème de Beppo Levi nous disent que* g *est positive intégrable d'intégrale*

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

De plus g *domine la famille* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |f_n| \leq g.$$

On en déduit que f *est définie presque partout (la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ *est presque partout finie et donc la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est presque partout absolument convergente). Le théorème de convergence dominée s'applique, d'où la conclusion du corollaire.* □

Théorème: Théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction ($x \in X$ est la variable d'intégration et $t \in I$ le paramètre réel). On assimile cette fonction f à la famille $(f_t)_{t \in I}$ à un paramètre en posant $f(x,t) = f_t(x)$. On suppose que f satisfait les hypothèses :

1. ***Continuité par rapport au paramètre** t : pour (μ) presque tout $x \in X$,*

$$\begin{array}{rcl} f(x,\cdot) : I & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est continue en } a\,;$$

2. ***Mesurabilité par rapport à la variable d'intégration** x : pour tout $t \in I$,*

$$\begin{array}{rcl} f(\cdot,t) = f_t : X & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est mesurable sur } X\,;$$

3. ***Domination** : il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que : $\forall t \in I$ $|f_t| \leq g$ -p.p.*

Alors f_t est intégrable pour tout $t \in I$ et $F(t) = \displaystyle\int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est continue en a.

* * * * * * * * * *

- *On a un résultat analogue avec la continuité à droite ou à gauche ;*
- *On peut tout à fait généraliser à la continuité dans un espace métrique : il suffit de remplacer I par un espace métrique, ou un ouvert d'un espace métrique.*

Démonstration. *Retour page 91*

L'intégrabilité de f_t est évidente. Ensuite, dire que F est continue en $a \in I$ revient à dire que pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $\big(F(t_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$. Il suffit donc d'appliquer le théorème de convergence dominée aux suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $g_n = f(\cdot, t_n)$. En effet, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, on déduit de la continuité de $f(x,\cdot)$ en a que $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ (pour presque tout $x \in X$). En outre pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$ on a $|g_n(x)| \leq g(x)$. Comme g est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int f(x,t_n)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x,a)\,\mathrm{d}\mu(x) = F(a).$$

$\square$

Théorème: Théorème de dérivation (global) des intégrales à paramètre

Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. *pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable par rapport à t de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$*
2. *pour tout $t \in I$, $f(\cdot,t) = f_t$ est* ***intégrable***
3. *il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $t \in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)\right| \leq g$ -p.p..*

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ est intégrable pour tout $t \in I$, $F(t) = \displaystyle\int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable en t et :

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

<u>Démonstration.</u> *Retour page 92*

L'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ sur X pour tout $t \in I$ est évidente. Pour la dérivée de F en $a \in I$, on applique le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = \frac{f(\cdot,t_n)-f(\cdot,a)}{t_n-a}$ où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers a comme pour le corollaire 4.2.1. En effet, pour presque tout $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,a)$ et d'après le théorème des accroissements finis, pour presque tout $x \in X$,

$$|g_n(x)| = \left|\frac{f(x,t_n)-f(x,a)}{t_n-a}\right| \leq \sup_{t\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$$

On déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(a)}{t_n-a} = \lim_{n\to+\infty}\int_X g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,a)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

□