Université de Bourgogne
Département de mathématique
UFR Sciences et Techniques

L3 mathématiques
UE-Intégration.

Corrigé de l'examen du 8 janvier 2018

Notations. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport λ. Établir les égalités suivantes en justifiant l'existence de chaque intégrale et les passages à la limite :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[0;+\infty[}\frac{f(x)}{1+x^n}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0;1]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[0;+\infty[}\frac{x^{n-1}f(x)}{1+x^n}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[1;+\infty]}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda(x).$

Réponse. Posons $f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}$ et $g_n(x) = x^{n-1}f_n(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les majorations : $(*)$ $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et $(**)$ $|g_n(x)| \leq |f(x)|$. D'où l'intégrabilité de f_n et g_n sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $x \geq 1$, $|\frac{f(x)}{x}| \leq |f(x)|$. Donc toutes les fonctions sont intégrables. Enfin on a les limites suivantes :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\mathbb{1}_{[0;1[}(x) + \frac{f(1)}{2}\mathbb{1}_{\{1\}}(x) \qquad g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x)}{x}\mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x) + \frac{f(1)}{2}\mathbb{1}_{\{1\}}(x)$$

En vertu des dominations $(*)$ et $(**)$ on peut appliquer le théorème de convergence dominée à f_n et g_n ce qui nous donne les limites attendues.

Exercice 2. Soient $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(t,x) = \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ et, pour $x > 0$, $G(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} g(t,x)\,\mathrm{d}\lambda(t)$.

1. Établir pour tout $u \geq 0$ on a $1 - e^{-u} \leq u$.
2. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(*Indication : on pourra utiliser la question 1 et étudier successivement les cas* $0 < a \leq x \leq 1$ *et* $1 \leq x \leq b < +\infty$)
3. En justifiant vos propos, montrer que G est $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de G.

Réponse.

1. Pour $u \geq 0$ on a $e^{-u} \leq 1$ donc en intégrant sur $[0;u]$ pour $u \geq 0$, il vient $1 - e^{-u} \leq u$.
2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ donc mesurable par rapport à la variable d'intégration $t \in \mathbb{R}_+^*$ et continue par rapport au paramètre $x \in \mathbb{R}_+^*$. En outre en utilisant l'inégalité de la question 1, pour tous a et b tels que $0 < a < 1 < b$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$

   si $x \in [a;1]$ $0 \leq e^{-xt} - e^{-t} \leq (1-x)te^{-xt} \leq (1-a)te^{-at}$ donc $|g(t,x)| \leq (1-a)e^{-at}$;

   si $x \in [1;b]$ $0 \leq e^{-t} - e^{-xt} \leq (x-1)te^{-t} \leq (b-1)te^{-t}$ donc $|g(t,x)| \leq (b-1)e^{-t}$.

   Comme les deux fonctions $t \mapsto (1-a)e^{-at}$ et $t \mapsto (b-1)e^{-t}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre : la fonction G est donc définie et continue sur $[a;b]$ pour tous a et b tels que $0 < a < 1 < b$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = e^{-tx}$. Ainsi :

   $$\forall a > 0\ \forall x \geq a\ \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad 0 \leq \frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = e^{-tx} \leq e^{-ta}$$

   La fonction $t \mapsto e^{-ta}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique G est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée :

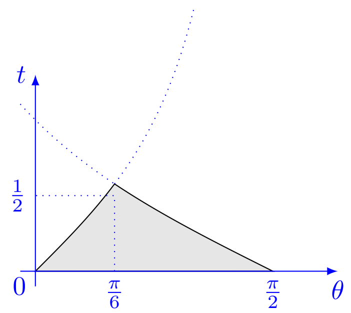
   $$G'(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$
4. On obtient immédiatement : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) = \ln x + G(1) = \ln x$.

EXERCICE 3. **Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.**
On considère le triangle $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x < 1\}$ et on pose $I = \displaystyle\int_T \frac{1}{1-xy}\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$.

1. (a) Au moyen d'un théorème du cours que l'on précisera, montrer que $I = -\displaystyle\int_{]0;1[} \frac{\ln(1-x^2)}{x}\, \mathrm{d}\lambda(x)$ puis que $I \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x^2)$ au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.
   (c) En utilisant un théorème du cours que l'on précisera, exprimer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ en fonction de I.
2. On note $S = \left\{(\theta,t) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R} : 0 < t < h(\theta)\right\}$ où h est la fonction définie par
$$h(\theta) = \tan\theta \cdot \mathbb{1}_{\left]0;\frac{\pi}{6}\right[}(\theta) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[}(\theta).$$
   Remarque : sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $h(\theta) = \min\left\{\tan\theta; \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right\}$.
   (a) Donner une représentation graphique de S.
   (b) Soit l'application φ définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}_+^*$ par
$$\varphi(\theta,t) = (\sin\theta + t\cos\theta, \sin\theta - t\cos\theta).$$
   Montrer que φ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de S sur T.
   Pour cela, on pourra utiliser les étapes suivantes :
      i. Montrer que φ est injective ;
      ii. Montrer que $\varphi(S) \subset T$
      (*Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, la relation* $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$) ;
      iii. Soit $(x,y) \in T$. Calculer $(\theta,t) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(\theta,t) = (x,y)$ puis montrer que $(\theta,t) \in S$;
      iv. Conclure.
   (c) Au moyen du changement de variable $(x,y) = \varphi(\theta,t)$, montrer que $I = \frac{\pi^2}{12}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.

Réponse.

1. (a) La fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{1-xy}$ est continue, donc mesurable, et positive sur T. On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli :
$$\int_T \frac{1}{1-xy}\, \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{]0;1[} \left[\int_{]0;x[} \frac{1}{1-xy}\, \mathrm{d}\lambda(y)\right] \mathrm{d}\lambda(x) = -\int_{]0;1[} \frac{\ln(1-x^2)}{x}\, \mathrm{d}\lambda(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$
   La fonction $x \mapsto h(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x}$ est continue sur $]0;1[$ prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1)^2 h(x) = 0$ donc d'après le critère de Riemann, la fonction h est intégrable sur $[0;1]$ d'où $I \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Le rayon de convergence est $R = 1$ et pour $|x| \leq 1$ on a : $\ln(1-x^2) = -\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^{2n}}{n}$.
   (c) On peut appliquer le théorème de Beppo-Levi (convergence croissante) :
$$I = -\int_{]0;1[} \frac{\ln(1-x^2)}{x}\, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{]0;1[} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^{2n-1}}{n}\, \mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{]0;1[} \frac{x^{2n-1}}{n}\, \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}.$$
2. (a) Tracé :



(b) i. Soient (θ_1, t_1) et (θ_2, t_2) dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}_+^*$. Si $\varphi(\theta_1, t_1) = \varphi(\theta_2, t_2)$ alors

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 \quad \text{et} \quad t\cos\theta_1 = \cos\theta_2.$$

Comme le sinus est injectif sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a nécessairement $\theta_1 = \theta_2$ et comme le cosinus ne s'annule pas sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $t_1 = t_2$ d'où l'injectivité de φ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}_+^*$.

ii. Soit $(\theta, t) \in S$ et $(x, y) = \varphi`\theta, t)$. On a $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $0 < t < \tan\theta$ donc

$$0 < x = \sin\theta - t\cos\theta < y = \sin\theta + t\cos\theta.$$

D'autre part,

$$t < \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$$

donc $y = \sin\theta + t\cos\theta < 1$ ce qui prouve que $(x, y) \in T$.

iii. Pour $(x, y) \in T$, $\frac{x+y}{2} \in]0; 1[$ donc on peut poser

$$\theta = \arcsin\frac{x+y}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad t = \frac{x-y}{2\cos\theta} = \frac{x-y}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{x-y}{\sqrt{4-(x+y)^2}} > 0.$$

De plus, $t = \frac{x-y}{2\cos\theta} < \frac{x+y}{2\cos\theta} = \tan\theta$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - t = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} - t = \frac{1-\sin\theta - t\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1-y}{\cos\theta} > 0$ donc $0 < t < h(t)$. Ce qui prouve que $(\theta, t) \in S$ et donc que φ est une bijection de S sur T.

iv. L'application φ est continue et même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur S, de bijection réciproque donnée par

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\arcsin\frac{x+y}{2} \; ; \; \frac{x-y}{\sqrt{4-(x+y)^2}}\right).$$

Cette réciproque φ^{-1} est continue sur T. De plus le jacobien de φ est non nul sur S :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - t\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta + t\sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -2\cos^2\theta \neq 0.$$

Donc φ est un difféomorphisme entre les ouverts S et T.

(c) D'après la formule de changement de variable et le théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} I &= \int_T \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \int_S \frac{2\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta + t^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\lambda_2(\theta, t) = \int_{]0;\frac{\pi}{2}[}\left[\int_{]0;h(\theta)[} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t)\right]\mathrm{d}\lambda(\theta) \\ &= \int_{]0;\frac{\pi}{6}[} 2\theta\,\mathrm{d}\lambda(\theta) + \int_{[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}[}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\mathrm{d}\lambda(\theta) = \frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

3. D'après les question 1c) et 2c), on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = 2I = \frac{\pi^2}{6}$.