Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques

L3 Mathématiques
UE-Intégration.

Examen du 6 janvier 2020
durée : trois heures

Notations. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 1. Soient $(E, \mathscr{E})$ et $(F, \mathscr{F})$ deux espaces mesurables et $f : (E, \mathscr{E}) \to (F, \mathscr{F})$ une application mesurable. On munit $(E, \mathscr{E})$ d'une mesure μ. Pour tout $B \in \mathscr{F}$ on pose $\nu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$.

1. Montrer que si une application $g : (F, \mathscr{F}) \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors $g \circ f : (E, \mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ est mesurable.
2. Montrer que ν est bien définie (c'est à dire que la formule définissant ν a bien un sens).
3. Montrer que ν est une mesure sur $(F, \mathscr{F})$.
4. Montrer que pour tout $B \in \mathscr{F}$ on a : $\displaystyle\int_E \mathbb{1}_B \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_F \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\nu$.

RÉPONSE.

1. Pour tout réel t, on a : $(g \circ f)^{-1}(]-\infty; t]) = f^{-1}\big(g^{-1}(]-\infty; t])\big)$. Si g est mesurable, alors $g^{-1}(]-\infty; t]) \in \mathscr{F}$ et puisque f est mesurable, $f^{-1}\big(g^{-1}(]-\infty; t])\big) \in \mathscr{E}$.
   Par conséquent $(g \circ f)^{-1}(]-\infty; t]) \in \mathscr{E}$, ce qui prouve la mesurabilité de $g \circ f$.
   Remarque : on peut remplacer les intervalles $]-\infty; t]$ par des boréliens quelconques, ou les éléments de tout autre système générateur de la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.
2. Comme f est mesurable, si $B \in \mathscr{F}$ alors $f^{-1}(B) \in \mathscr{E}$. Donc $\nu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$ a bien un sens.
3. Comme μ – en tant que mesure – prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, il en est de même pour ν. En outre, $\nu(\varnothing) = \mu\big(f^{-1}(\varnothing)\big) = \mu(\varnothing) = 0$. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties appartenant à $\mathscr{F}$, deux à deux disjointes. Alors, on déduit de la σ-additivité de μ et des propriétés ensemblistes élémentaires que :
$$\nu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\big(f^{-1}(B_n)\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n).$$
   Par conséquent ν est σ-additive. C'est donc une mesure sur $(F, \mathscr{F})$.
4. Soit $B \in \mathscr{F}$. Alors :
$$\int_E \mathbb{1}_B \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_E \mathbb{1}_{f^{-1}(B)} \,\mathrm{d}\mu = \mu\big(f^{-1}(B)\big) = \nu(B) = \int_F \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\nu.$$

EXERCICE 2. Montrer, en énonçant les théorèmes du cours utilisés et en justifiant vos calculs que pour tous réels strictement positifs α et β on a
$$\int_{]0;+\infty[} \frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta x}} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha + \beta n)^2} < +\infty.$$

RÉPONSE. En premier lieu, puisque $\beta > 0$, $0 < \mathrm{e}^{-\beta x} < 1$ pour tout $x > 0$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1-\mathrm{e}^{-\beta x}}$ est continue donc Riemann-intégrable sur tout segment $[a; b]$ de $]0; +\infty[$. En outre, la fonction f est positive sur $]0; +\infty[$.
Au voisinage de 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta x}} = \frac{1}{\beta}$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur tout intervalle de la forme $]0; a]$.
Au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle\frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta x}} \sim x\,\mathrm{e}^{-\alpha x} = \big(x\,\mathrm{e}^{-\alpha x/2}\big)\,\mathrm{e}^{-\alpha x/2}$, et puisque $\alpha > 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\alpha x/2} = 0$. Par conséquent, sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$ la fonction f est dominée par $x \mapsto K_a\,\mathrm{e}^{-\alpha x/2}$ qui est intégrable (K_a étant une constante dépendant de a).
Ainsi f est intégrable sur $]0; +\infty[$, autrement dit :
$$0 \leq \int_{]0;+\infty[} \frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta x}} \,\mathrm{d}\lambda(x) < +\infty.$$
D'autre part, comme $0 < \mathrm{e}^{-\beta x} < 1$ pour tout $x > 0$, on obtient le développement en série pour $x > 0$:
$$\frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta x}} = x\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-n\beta x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x\,\mathrm{e}^{-(\alpha+n\beta)x}.$$

Au moyen d'une intégration par parties il vient :

$$\begin{aligned}\int_{]0;+\infty[} x\,\mathrm{e}^{-(\alpha+n\beta)x}\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \left[-\frac{x}{\alpha+n\beta}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+n\beta)x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha+n\beta}\int_{]0;+\infty[} \mathrm{e}^{-(\alpha+n\beta)x}\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \left[-\frac{1}{(\alpha+n\beta)^2}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+n\beta)x}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{(\alpha+n\beta)^2}\end{aligned}$$

On conclut au moyen corollaire du théorème de Beppo Levi appliqué aux séries de fonctions positives :

> Soit $(X,\mathscr{X},\mu)$ un espace mesuré et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies μ-presque partout sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$). Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et :
>
> $$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X u_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Ici : $(X,\mathscr{X},\mu) = (\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$, $u_n : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-(\alpha+n\beta)x}$, ce qui donne :

$$\int_{]0;+\infty[} \frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1-\mathrm{e}^{-\beta x}}\,\mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+\beta n)^2}.$$

EXERCICE 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = \dfrac{n}{(x+1)x\sqrt{x}}\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

1. Vérifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f_n est intégrable sur $]0;+\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ.
3. En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ en utilisant un théorème du cours dont on rappellera l'énoncé, et pour lequel on vérifiera que les hypothèses sont bien satisfaites.

RÉPONSE.

1. Pour tout $x>0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right) = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = f(x)$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$ on a :

$$\left|\frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \le 1 \qquad \text{donc} \qquad |f_n(x)| \le \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = f(x).$$

   Or $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ est intégrable (positive) sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc intégrable sur tout intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}_+^*$; au voisinage de 0 (à droite), g est équivalente à $x\mapsto x^{-\frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $]0;1]$, et au voisinage de $+\infty$, g est équivalente à $x\mapsto x^{-\frac{3}{2}}$ qui est intégrable sur $[1;+\infty[$. On en déduit l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. On applique le théorème de convergence dominée :

> Soit $(X,\mathscr{X},\mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies μ-presque partout sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement (μ-presque partout) vers une fonction f mesurable. On suppose qu'il existe une fonction intégrable $g : X\to\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et μ-presque tout $x\in X$ $|f_n(x)|\le g(x)$.
> Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ f_n est intégrable, f est intégrable, et on a les égalités :
>
> $$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

   On applique ce théorème pour $(X,\mathscr{X},\mu) = (\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$ avec les fonctions f_n de l'énoncé, et $f = g : x\mapsto \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

   On effectue le changement de variable $t=\sqrt{x}$. Il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}\lambda(t) = 2\Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \pi.$$

Exercice 4. On considère les fonctions f et g définies sur $[0;1]\times[0;1]\setminus\{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad g(x,y)=\frac{x-y^2}{x^2+y^2}.$$

Étudier l'intégrabilité de chacune de ces fonctions sur $[0;1]\times[0;1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2, et en cas d'intégrabilité, calculer les intégrales (on pourra utiliser les coordonnées polaires).

Réponse. Les deux fonctions sont λ_2-mesurables car continues sur $[0;1]\times[0;1]\setminus\{(0,0)\}$ (et même intégrable sur tout compact). On découpe $[0;1]\times[0;1]\setminus\{(0,0)\}$ en deux triangles :

$$L=\{(x,y)\in[0;1]\times[0;1]\setminus\{(0,0)\}:y\le x\}\quad\text{et}\quad U=\{(x,y)\in[0;1]\times[0;1]\setminus\{(0,0)\}:y>x\}$$

et on effectue le changement de variables en coordonnées polaires : $H:(r,\theta)\mapsto(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$. On a

$$H^{-1}(L)=\left\{(r,\theta)\in]0;1]\times\left[0;\frac{\pi}{4}\right]:0\le\cos\theta\le\frac{1}{r}\right\}\text{ et }H^{-1}(U)=\left\{(r,\theta)\in]0;1]\times\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]:0\le\sin\theta\le\frac{1}{r}\right\}$$

et

$$\mathrm{Jac}_{(r,\theta)}\,x(H)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

1. Pour f : on calcule l'intégrale de $|f|$ en utilisant les rôles symétriques des variables x et y, et après changement de variables en coordonnées polaires, en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli. Cela donne :

$$\int_{[0;1]\times[0;1]}\frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_L\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=+\infty$$

car la fonction $\theta\mapsto\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r$ est est constante égale à $+\infty$ sur $[0;\frac{\pi}{4}]$.
Ainsi f n'est pas intégrable sur $[0;1]\times[0;1]$.

2. Pour g : sur $[0;1]\times[0;1]$, on a $|x-y^2|\le x+y^2\le x+y$. On utilise à nouveau la symétrie $\Big($de la fonction $(x,y)\mapsto\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big)$ le changement de variables en coordonnées polaires, et on applique le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_{[0;1]\times[0;1]}|g(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le2\int_T\frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}(\cos\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta\le\pi$$

Ainsi g est intégrable sur $[0;1]\times[0;1]$.
On peut alors appliquer le changement de variable et le théorème de Fubini à g :

$$\begin{aligned}\int_{[0;1]\times[0;1]}g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_T g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_U g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}(\cos\theta-r\sin^2\theta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}(\cos\theta-r\sin^2\theta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{8}\\&=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\Big[\tan\theta-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[\ln(\sin\theta)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln2.\end{aligned}$$

Exercice 5. Pour $t\in\mathbb{R}$, on considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $f(t)=\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

On rappelle le résultat suivant du cours : $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(0)$ (on pourra effectuer un changement de variable).
3. Montrer que f est dérivable, calculer la dérivée f' et au moyen d'une intégration par parties, montrer que f satisfait l'équation différentielle linéaire

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad 2(t+\mathrm{i})f'(t)+f(t)=0.$$

4. On pose $g(t)=\big(f(t)\big)^2$. Montrer que g satisfait l'équation différentielle
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad (t+\mathrm{i})g'(t)+g(t)=0.$$
5. En déduire une expression de g puis de f (utiliser la question 2).

Réponse. Dans la suite, on note
$$h(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}tx}=h_t(x).$$

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction $h_t : x\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc mesurable et même intégrable sur tout intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.
Sur $]0;1]$
$$|h_t(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}tx}\right|=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\leq x^{-\frac12}$$
et $x\mapsto x^{-\frac12}$ est intégrable sur $]0;1]$.
Sur $[1;+\infty[$,
$$|h_t(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}tx}\right|=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\leq \mathrm{e}^{-x}$$
et $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction h_t est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est bien définie.
Posons $g_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0;1]}(x)+\mathrm{e}^{-x}\mathbb{1}_{]1;+\infty]}(x)$. On a $|h_t|\leq g_1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $t=\sqrt{x}$. Il vient :
$$f(0)=\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}_+^*}2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}\lambda(t)=\sqrt{\pi}.$$
3. Calculons la dérivée partielle de $(x,t)\mapsto h(x,t)$ par rapport à t :
$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)=\mathrm{i}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}tx}.$$
Notons $g_2(x)=\left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right|=\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}=\left(\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x/2}\right)\mathrm{e}^{-x/2}$. La fonction g_2 est continue sur $[0;+\infty[$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x/2}=0$, il existe une contante $K>0$ telle que pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g_2(x)\leq K\,\mathrm{e}^{-x/2}$. Comme $x\mapsto \mathrm{e}^{-x/2}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$, on en déduit du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que la fonction f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$$\begin{aligned}f'(t)=\int_{]0;+\infty[}\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\lambda(x)&=\mathrm{i}\int_{]0;+\infty[}\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{(\,\mathrm{i}t-1)x}\,\mathrm{d}\lambda(x)\\&=\mathrm{i}\left[\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{i}t-1}\,\mathrm{e}^{(\,\mathrm{i}t-1)x}\right]_0^{+\infty}-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}t-1}\int_{]0;+\infty[}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{x(\,\mathrm{i}t-1)}\,\mathrm{d}\lambda(x)\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2(\,\mathrm{i}t-1)}f(t)\end{aligned}$$
Ainsi, f satisfait l'équation différentielle linéaire
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad 2(t+\mathrm{i})f'(t)+f(t)=0.$$
4. On pose $g(t)=\big(f(t)\big)^2$. Alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=2f(t)f'(t)$ donc g satisfait l'équation différentielle
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad (t+\mathrm{i})g'(t)+g(t)=2(t+\mathrm{i})f(t)f'(t)+\big(f(t)\big)^2=0.$$
On reconnaît la dérivée d'un produit dans le membre de gauche, autrement dit :
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[(t+\mathrm{i})g(t)\Big]=0.$$
On en déduit qu'il existe une constante $k\in\mathbb{C}$ telle que
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad g(t)=\big(f(t)\big)^2=\frac{k\,\mathrm{i}}{t+\mathrm{i}}=\frac{k(1+\,\mathrm{i}t)}{1+t^2}$$
Comme $f(0)=\sqrt{\pi}$, on obtient :
$$f(t)=\left(\frac{\pi^2}{1+t^2}\right)^{\frac14}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\operatorname{Arctan}t}\ \text{ou encore}\ f(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\,\mathrm{i}t}}$$
où la racine carrée d'un nombre complexe $z=r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, avec $r>0$ et $-\pi<\theta<\pi$ est définie par $\sqrt{z}=r^{\frac12}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta/2}$.