Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques

L3 mathématiques
UE-Calcul intégral

Examen partiel du 4 novembre 2019

durée : 1h30

Exercice 1.

1. Soient x et y des réels. Montrer que la famille $\big(\min(p,q)x^py^q\big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $|x|<1$ et $|y|<1$ et que dans ce cas
$$\sum_{p,q\geq 1}\min(p,q)x^py^q=\frac{xy}{(1-x)(1-y)(1-xy)}.$$
(*Indication : on pourra penser à partitionner* $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ *en fonction des positions relatives de* p *et* q).
2. En déduire un développement en série entière de la fonction $f:t\mapsto\frac{t^2}{(1-t)^2(1-t^2)}$ en 0 en précisant rayon de convergence.

Réponse.

1. Commençons par le cas positif ($x\geq 0$ et $y\geq 0$) en se plaçant dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On partitionne $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ en $\{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*: p<q\}\sqcup\{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*: q<p\}\sqcup\{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*: p=q\}$. De la propriété de sommation par paquets, on tire :
$$\begin{aligned}\sum_{p,q\geq 1}\min\{p,q\}x^py^q&=\sum_{p>q\geq 1}qx^py^q+\sum_{q>p\geq 1}px^py^q+\sum_{p\geq 1}px^py^p\\&=\sum_{q\geq 1}\Big(q(xy)^q\sum_{p>q}x^{p-q}\Big)+\sum_{p\geq 1}\Big(p(xy)^p\sum_{q>p}y^{q-p}\Big)+\sum_{p\geq 1}p(xy)^p\\&=\Big(\sum_{q\geq 1}q(xy)^q\Big)\Big(\sum_{n\geq 1}x^n\Big)+\Big(\sum_{p\geq 1}p(xy)^p\Big)\Big(\sum_{n\geq 1}y^n\Big)+\sum_{p\geq 1}p(xy)^p.\end{aligned}$$
On voit apparaître la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}}t^n$ et sa dérivée $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}nt^{n-1}$ où t prend les valeurs x, y ou xy. Ces deux séries sont absolument convergentes (sommables) si et seulement si $|t|<1$, de sommes respectives $\frac{1}{1-t}$ et $\frac{1}{(1-t)^2}$. On en déduit que la famille $\big(\min(p,q)x^py^q\big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $|x|<1$ et $|y|<1$ et que dans ce cas :
$$\begin{aligned}\sum_{p,q\geq 1}\min(p,q)x^py^q&=\Big(\sum_{q\geq 1}q(xy)^q\Big)\Big(1+\sum_{n>0}x^n+\sum_{n>0}y^n\Big)\\&=\frac{xy}{(1-xy)^2}\Big(1+\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}\Big)=\frac{xy}{(1-xy)(1-x)(1-y)}.\end{aligned}$$
2. En posant $x=y=t$, la famille $\big(\min(p,q)t^{p+q}\big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $|t|<1$ et l'expression de la question 1 donne :
$$\frac{t^2}{(1-t^2)(1-t)^2}=\sum_{p,q\geq 1}\min\{p,q\}t^{p+q}=\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{p=1}^{n-1}\min\{p,n-p\}\right)t^n.$$
Or en distinguant les cas n pair et n impair, on a :
$$\sum_{p=1}^{n-1}\min\{p,1-p\}=\begin{cases}2(1+2+\cdots+k)-k=k^2=\frac{n^2}{4} & \text{si } n=2k,\ k\in\mathbb{N}\\ 2(1+2+\cdots+k)=k(k+1)=\frac{n^2-1}{4} & \text{si } n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$$
donc f a pour développement en série, avec rayon de convergence 1 :
$$f(t)=\frac{t^2}{(1-t^2)(1-t)^2}=\sum_{n\geq 2}\frac{2n^2-1+(-1)^n}{8}t^n\qquad |t|<1.$$

EXERCICE 2.

1. **[Série de Riemann]**. On se propose de retrouver la règle de convergence des séries de Riemann avec les familles sommables.
Soit α un réel positif.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(k,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que :
$$n = 2^k + p \quad \text{et} \quad 0 \leq p \leq 2^k - 1.$$
   (b) Justifier l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}}_+$: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{p=0}^{2^k-1} \frac{1}{(2^k+p)^\alpha}$.
   (c) En déduire la double inégalité dans $\overline{\mathbb{R}}_+$: $\displaystyle\frac{1}{2^\alpha}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}$
   (d) Conclure que la famille $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulementsi $\alpha > 1$.
2. Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille de réels.
   (a) Montrer que si x est sommable alors pour tout réel $m > 0$, l'ensemble $I_m = \{i \in I : |x_i| \geq m\}$ est un sous-ensemble fini de I.
(*Indication : on pourra raisonner par contraposée*).
   (b) Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ autrement dit si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, quelle condition nécessaire sur la convergence (absolue) des séries peut-on déduire de 2.(a) ?
   (c) On suppose ici que $x = (x_i)_{i\in I}$ est une famille de réels **positifs**. Déduire de 2.(a) que :
      i. si x est sommable alors pour tout réel $\alpha > 1$ la famille $(x_i^\alpha)_{i\in I}$ est sommable ;
      ii. si x n'est pas sommable, alors quel que soit le réel $\alpha < 1$ la famille $(x_i^\alpha)_{i\in I}$ n'est pas sommable non plus. (*Indication : on pourra raisonner par contraposée et utiliser 2.(c) i.*).

Réponse.

1. (a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$ (car $\mathbb{R}$ est archimédien). On pose alors $p = n - 2^k$. On a bien $0 \leq p \leq 2^{k+1} - 1 - 2^k = 2^k - 1$. Aussi tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique sous la forme $n = 2^k + p$ avec $0 \leq p \leq 2^k - 1$ (l'unicité de p découle de l'unicité de k).
   (b) D'après 1.(a), on a la partition suivante de $\mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{2^k + p : 0 \leq p \leq 2^k - 1\right\}.$$
En utilisant la propriété de sommation par paquets pour la famille positive $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il vient :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{p=0}^{2^k-1} \frac{1}{(2^k+p)^\alpha}.$$
   (c) Pour $0 \leq p \leq 2^k - 1 < 2^k$ on a :
$$\frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{2^{k\alpha}} = \frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} < \frac{1}{(2^k+p)^\alpha} \leq \frac{1}{2^{k\alpha}}$$
d'où par croissance de la sommation :
$$\frac{1}{2^\alpha}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=0}^{2^k-1}\frac{1}{2^{k\alpha}} = \frac{1}{2^\alpha}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{2^{k\alpha}} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=0}^{2^k-1}\frac{1}{(2^k+p)^\alpha} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{p=0}^{2^k-1}\frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{2^{k\alpha}}$$
et donc
$$\frac{1}{2^\alpha}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}.$$

(d) On reconnaît à gauche et à droite de cette double inégalité la somme des termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}$, qui converge dans $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\frac{1}{2^{(\alpha-1)}} < 1$, c'est à dire $\alpha > 1$. Il s'ensuit que $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement $\alpha > 1$.

2. (a) Soit $m > 0$. Si x est sommable, alors

$$0 \leq m \times \operatorname{card} I_m \leq \sum_{i\in I_m} |x_i| \leq \sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$$

donc I_m est un sous-ensemble fini de I.

(b) On retrouve le résultat suivant : dans le cas d'une suite de réel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la convergence absolue de la série de terme général x_n implique que le terme général tend vers 0.

(c) i. Si x est sommable, alors $I_1 = \{i \in I : x_i \geq 1\}$ est un sous-ensemble fini de I donc si $\alpha > 1$, en dehors d'un nombre fini de termes (les x_i tels que $i \in I_1$), on a $x_i^\alpha \leq x_i$, ce qui implique la sommabilité de $(x_i^\alpha)_{i\in I}$;

ii. On raisonne par contraposée. Soit $\alpha \in]0; 1[$.

Montrons que si $x^\alpha = (x_i^\alpha)_{i\in I}$ est sommable, alors $x = (x_i)_{i\in I}$ est sommable.

On applique le résultat de 2.(c) i. en remplaçant x_i par $y_i = x_i^\alpha$ et α par $\beta = \frac{1}{\alpha} > 1$: si $x^\alpha = (x_i^\alpha)_{i\in I}$ est sommable c'est à dire $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(y_i^\beta)_{i\in I}$ est sommable, c'est à dire $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Exercice 3. Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable.

1. Rappeler ce que signifie que $\mathscr{M}$ est une tribu sur X.
2. Rappeler ce que signifie que
   (a) m est une mesure sur $\mathscr{M}$;
   (b) la mesure m est finie ;
   (c) la mesure m est σ-finie.
3. Soient m_1 et m_2 deux mesures σ-finies sur $\mathscr{M}$. Soient a_1 et a_2 deux réels positifs. On définit l'application $m = a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2$ sur $\mathscr{M}$ par

$$\forall A \in \mathscr{M} \qquad m(A) = a_1 \cdot m_1(A) + a_2 \cdot m_2(A).$$

   (a) Montrer que m est une mesure sur $\mathscr{M}$;
   (b) Montrer que si m_1 et m_2 sont des mesures finies, il en est de même de m ;
   (c) On suppose que $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ et que m_1 et m_2 sont σ-finies (mais pas finies) et on se donne deux suites croissantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(Y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}$ telles que

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}^{\uparrow} X_k = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}}^{\uparrow} Y_\ell \qquad \text{et} \qquad \forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad m_1(X_k) < +\infty \quad m_2(Y_\ell) < +\infty.$$

   Montrer que m est σ-finie (mais pas finie).
   (Indication : on pourra utiliser les ensembles $Z_n = \bigcup_{k=0}^{n}(X_k \cap Y_{n-k})$ pour $n \in \mathbb{N}$).
4. On considère deux mesures α et β sur $\mathscr{M}$ telles que $\alpha \leq \beta$ (c'est à dire : pour tout $A \in \mathscr{M}$ $\alpha(A) \leq \beta(A)$). On se place dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et on convient que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(+\infty) - a = (+\infty)$. On suppose que α est une mesure finie. On définit l'application $\delta = \beta - \alpha$ sur $\mathscr{M}$ par

$$\forall A \in \mathscr{M} \qquad \delta(A) = \beta(A) - \alpha(A).$$

   (a) Montrer que δ est une mesure sur $\mathscr{M}$;
   (b) Montrer que : $(\beta \text{ est finie}) \Longleftrightarrow (\delta \text{ est finie})$ et $(\beta \text{ est } \sigma\text{-finie}) \Longleftrightarrow (\delta \text{ est } \sigma\text{-finie})$.
   (c) Peut-on supprimer l'hypothèse α finie ?

Réponse.

1. $\mathscr{M}$ est une tribu sur X signifie que
   — $\mathscr{M}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(X)$ (ensemble des parties de X) ;
   — $\mathscr{M}$ contient X : $X \in \mathscr{M}$;
   — $\mathscr{M}$ est stable par passage au complémentaire : $(A \in \mathscr{M}) \implies (X \setminus A \in \mathscr{M})$;
   — $\mathscr{M}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{M}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}$ (on peut remplacer $\mathbb{N}$ par un ensemble dénombrable quelconque).
2. (a) Une mesure m sur $\mathscr{M}$ est une application de $\mathscr{M}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (donc positive) qui satisfait :
   — $m(\varnothing) = 0$;
   — m est σ-additive : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dénombrable de parties deux à deux disjointes de $\mathscr{M}$, alors $m\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ (on peut remplacer $\mathbb{N}$ par un ensemble dénombrable quelconque).

   (b) m est une mesure finie si $m(X) < +\infty$.

   (c) m est une mesure σ-finie si $m(X) = +\infty$ et s'il existe une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties dans $\mathscr{M}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(X_n) < +\infty$ et $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
   (La croissance de la suite n'est pas nécessaire, mais facilite la compréhension de la notion ; on peut toujours s'y ramener).
3. (a) Tout d'abord, on remarque que m est bien à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. De plus, $m_1(\varnothing) = m_2(\varnothing) = 0$ donc $m(\varnothing) = a_1 \cdot m_1(\varnothing) + a_2 \cdot m_2(\varnothing) = 0$. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de parties deux à deux disjointes de $\mathscr{M}$, alors :
   $$m_1\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} m_1(A_i), \quad m_2\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} m_2(A_i)$$
   donc par linéarité de la somme (avec coefficients positifs)
   $$m\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = a_1 \cdot m_1\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) + a_2 \cdot m_2\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I}\big(a_1 \cdot m_1(A_i) + a_2 \cdot m_2(A_i)\big) = \sum_{i\in I} m(A_i).$$
   Ainsi m est une mesure sur $\mathscr{M}$.

   (b) Si $m_1(X) < +\infty$ et $m_2(X) < +\infty$ alors $m(X) = a_1 \cdot m_1(X) + a_2 \cdot m_2(X) < +\infty$.

   (c) Remarquons tout d'abord que si $m_1(X) = +\infty$ et $m_2(X) = +\infty$ alors comme $(a_1; a_2) \neq (0; 0)$
   $$m(X) = a_1 \cdot m_1(X) + a_2 \cdot m_2(X) = +\infty$$
   donc m n'est pas finie. Montrons qu'en revanche m est σ-finie. Considérons les suites croissantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de l'énoncé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = \bigcup_{k=0}^{n}(X_k \cap Y_{n-k})$. Alors :
   $$Z_n \subset \bigcup_{k=0}^{n} X_k = X_n \quad \text{donc} \quad m_1(Z_n) \leq m_1\Big(\bigcup_{k=0}^{n} X_k\Big) = m_1(X_n) < +\infty$$
   et
   $$Z_n \subset \bigcup_{\ell=0}^{n} Y_\ell = Y_n \quad \text{donc} \quad m_1(Z_n) \leq m_2\Big(\bigcup_{\ell=0}^{n} Y_\ell\Big) = m_2(Y_n) < +\infty$$
   donc
   $$m(Z_n) = a_1 \cdot m_1(Z_n) + a_2 \cdot m_2(Z_n) < +\infty$$
   En outre, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque pour $0 \leq k \leq n$, on a $X_k \cap Y_{n-k} \subset X_k \cap Y_{n+1-k}$. Enfin
   $$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k=0}^{n}(X_k \cap Y_{n-k}) = \bigcup_{0\leq k\leq n}(X_k \cap Y_{n-k}) &= \bigcup_{(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(X_k \cap Y_\ell) \\ &= \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k\Big) \cap \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_\ell\Big) \\ &= X\end{aligned}$$

   Donc m est σ-finie.

4. (a) Tout d'abord, on remarque que δ est bien définie et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

   - soit $0 \leq \alpha(A) \leq \beta(A) < +\infty$ auquel cas $0 \leq \delta(A) < +\infty$
   - soit $0 \leq \alpha(A) < \beta(A) = +\infty$ et alors $\delta(A) = +\infty$ (convention usuelle : $(+\infty) - a = +\infty$ pour a fini).

   De plus $\alpha(\varnothing) = \beta(\varnothing) = 0$ donc $\delta(\varnothing) = \beta(\varnothing) - \alpha(\varnothing) = 0$. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de parties deux à deux disjointes de $\mathscr{M}$, alors :

$$\alpha\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} \alpha(A_i)$$

$$\beta\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} \beta(A_i) = \sum_{i\in I} \Big(\delta(A_i) + \alpha(A_i)\Big) = \sum_{i\in I} \delta(A_i) + \sum_{i\in I} \alpha(A_i) = \sum_{i\in I} \delta(A_i) + \alpha\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big)$$

   Comme α est finie, on a bien

$$\delta\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \beta\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) - \alpha\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big)$$

   Ainsi δ est une mesure sur $\mathscr{M}$.

   (b) Dire que β est finie signifie que $\beta(X) < +\infty$ ce qui équivaut à dire que $\delta(X) + \alpha(X) < +\infty$ donc puisque $\alpha(X) < +\infty$, que $\delta(X) < +\infty$, autrement dit que δ est finie.
   La mesure β est σ-finie si et seulement si il existe une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}$ telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta(X_n) = \delta(X_n) + \alpha(X_n) < +\infty$. Comme $\alpha(X_n) \leq \alpha(X) < +\infty$, cela équivaut à dire que $\delta(X_n) < +\infty$, autrement dit que δ est σ-finie.

   (c) Si α n'est pas finie, on ne peut même pas définir δ car on ne peut pas donner de sens général à la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$.