Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques

Licence de mathématiques
3ème année
Calcul intégral

Autour de la dénombrabilité

La relation **"être en bijection avec"** est une relation d'équivalence sur les ensembles :
— elle est réflexive puisque tout ensemble est en bijection avec lui même (application identité) ;
— elle est symétrique (si $\varphi : A \to B$ est une bijection alors $\varphi^{-1} : B \to A$ est une bijection) ;
— elle est transitive (si $\varphi : A \to B$ et $\psi : B \to C$ sont des bijections, alors $\psi \circ \varphi : A \to C$ aussi).

Si deux ensembles sont en bijection, on dit qu'ils ont **même cardinal**.

Pour des ensembles finis, le cardinal est simplement le nombre d'éléments de l'ensemble.

Pour un ensemble infini – au fait, un ensemble est infini s'il est en bijection avec un de ses sous-ensembles stricts, par exemple $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^*$ via $n \mapsto n+1$ – il y a aussi des "degrés" dans les cardinaux. Mais là, il y a quelques difficultés. On admet un axiome dit '**axiome du choix** dont un des énoncés est le suivant

si une application $\psi : X \to Y$ est surjective, alors il existe une section,
c'est à dire une application $\varphi : Y \to X$ telle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_Y$.

(pour déterminer φ, on doit faire le **choix** simultané d'un antécédent pour chaque $y \in Y$). La section est forcément injective.

1 Les cardinaux sont ordonnés.

On ordonne les cardinaux de façon suivante :

$$\text{si } \varphi : A \to B \text{ est injective, alors } \operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B\,;$$

Le théorème dit "de Cantor-Bernstein" nous dit que s'il existe une injection de A dans B et une de B dans A alors A et B sont en bijection. Autrement dit :

$$(\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B \text{ et } \operatorname{card} B \leq \operatorname{card} A) \Rightarrow (\operatorname{card} A = \operatorname{card} B).$$

L'axiome du choix nous dit aussi que

$$\text{si } \psi : X \to Y \text{ est surjective, alors } \operatorname{card} Y \leq \operatorname{card} X$$

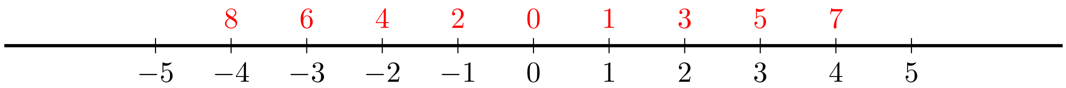
2 Dénombrabilité

2.1 Définition

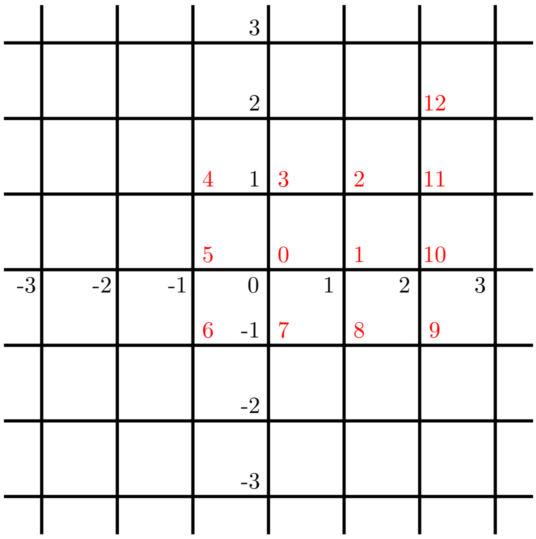
Un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$: autrement dit, il est infini et on peut numéroter ses éléments avec les entiers.
Un ensemble est **au plus dénombrable** s'il est en bijection avec un sous ensemble de $\mathbb{N}$: autrement dit, il est fini ou dénombrable.

2.2 Exemples

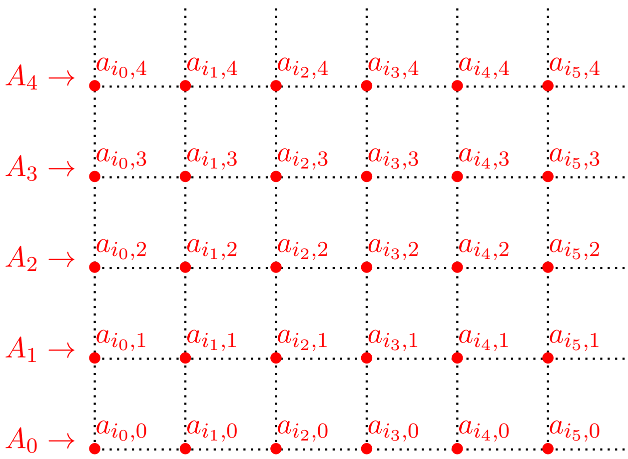
- Tout sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ est dénombrable : si $A \subset \mathbb{N}$ est infini, on pose $a_0 = \inf A$ et on définit par récurrence $a_n = \inf(A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $n \mapsto a_n$ est une bijection entre $\mathbb{N}$ et A.
- Tout sous ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable : il suffit d'appliquer le point précédent et la définition de dénombrable.
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable :
$$n \mapsto \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n > 0 \\ -2n & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$
est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.



- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (et donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$) aussi est dénombrable :



- Si A est dénombrable et B est non vide au plus dénombrable, alors $A \times B$ est dénombrable : il suffit d'appliquer le point précédent et la définition de dénombrable.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable : l'application $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ est une surjection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$ (non injective puisque $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \dots$). Comme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable (c'est à dire en bijection avec $\mathbb{N}$), par composition il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$
$$\mathbb{N} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$
et donc une section (injective) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. Or il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$: l'inclusion ! Donc il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ (théorème de Cantor-Bernstein).
- Une union dénombrable d'ensembles (au plus) dénombrable est (au plus) dénombrable :
$$\text{si } I \text{ est dénombrable et } (A_i)_{i \in I} \text{ est une famille d'ensembles (au plus) dénombrables,}$$
$$\text{alors } A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ est (au plus) dénombrable.}$$
C'est le même principe que précédemment. En effet on peut numéroter les éléments de I avec les entiers : $I = \{i_0, i_1, i_2, \dots\}$ et pour chaque $i \in I$ on peut numéroter A_i : $A_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, \dots\}$. Alors l'application
$$(p, q) \mapsto a_{i_p, q} \qquad \text{est une surjection de } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ sur } A.$$
Donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A donc une section (injective) de A dans $\mathbb{N}$. Or $A_{i_0} \subset A$ donc il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans A. D'où la dénombrabilité de A.



- Les espaces $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients entiers et rationnels respectivement sont dénombrables. En effet :
  $\mathbb{Q}[X] = \{0\} \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ où $\mathbb{Q}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré exactement n. Or

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{Q}_n[X] & \to & \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^* & \\ P & \mapsto & (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) & \text{tel que } P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \end{array}$$

  est une bijection donc $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable, et donc $\mathbb{Q}[X]$ est union dénombrable d'ensembles dénombrables.
- $\mathbb{R}$ et $[0,1[$ ne sont pas dénombrables. En effet, supposons que $\varphi : \mathbb{N}^* \to [0;1[$ est une bijection (en d'autre termes on numérote tous les réels de $[0;1[$ avec des entiers). Donnons pour chaque réel $\varphi(p) = x_p$ de $[0;1[$ son développement décimal propre [1] (i.e. non constant égal à 9 à partir d'un certain rang) c'est à dire

$$\varphi(p) = x_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{p,n}}{10^n} \quad \text{où } a_{p,n} \text{ est la partie entière de} \quad 10^n\Big(x_p - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n,k}}{10^k}\Big).$$

  Construisons alors le réel $y \in [0;1[$ de façon suivante :

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n} \quad \text{où } b_n = 0 \text{ si } a_{n,n} \neq 0 \text{ et } b_n = 1 \text{ si } a_{n,n} = 0.$$

  Cette écriture est un développement propre (pas de 9 dans cette écriture) et ne coïncide avec aucun x_p puisque $a_{p,p} \neq b_p$. Ainsi, $y \notin \varphi(\mathbb{N})$. Contradiction.

1. On rappelle que tout nombre ayant une écriture décimale finie (i.e. un *nombre décimal*) a une deuxième écriture décimale illimitée par exemple $324,27 = 324,27000000\ldots = 324,26 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 324,26999999\ldots$