

Examen du 7 janvier 2019  
 durée : trois heures

**Notations.** On désigne par  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et  $\lambda_d$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .

**Vous rédigerez les exercices 1 et 2 sur une feuille, les exercices 3 et 4 sur une autre.**

EXERCICE 1. Soit  $\mu$  une mesure  $\sigma$ -finie sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{A})$ , et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable positive. On munit  $X \times \mathbb{R}_+$  de la tribu produit  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$  et de la mesure produit  $\mu \otimes \lambda$  et on considère  $H = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}_+ : f(x) > t\}$ .

1. Justifier que  $H \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ .
2. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, démontrer que

$$\int_X f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \, d\lambda(t) \quad (\text{indication : on calculera } (\mu \otimes \lambda)(H) \text{ de deux façons}).$$

\*\*\*

EXERCICE 2. On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \, d\lambda(t)$

1. Vérifier que  $f$  est bien définie et continûment dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Donner la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Donner la dérivée de  $f$  sous forme d'une intégrale puis calculer cette intégrale.
4. En déduire une expression simple de  $f$  (on pensera à utiliser la question 2), et déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Rappel. Vous rédigerez les exercices 1 et 2 sur une feuille, les exercices 3 et 4 sur une autre.**

EXERCICE 3. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable par rapport à  $\lambda$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto e^{nx} f(x)$  est intégrable sur  $[0, 1]$ .

On suppose dans la suite de l'exercice que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]$  et qu'il existe une constante  $M \in \mathbb{R}_+$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_{[0;1]} e^{nx} f(x) \, d\lambda(x) \leq M.$$

2. On veut montrer que  $f$  est nulle presque partout. Pour cela, on note  $D = \{x \in [0; 1] : f(x) \neq 0\}$  et on fixe  $K > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0; 1]$ , on pose  $h_{K,n}(x) = \min\{e^{nx} f(x); K\}$ .
  - (a) Montrer que la suite de fonctions  $(h_{K,n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Déterminer la fonction limite.
  - (b) En déduire que  $\lambda(D) \leq \frac{M}{K}$ , puis conclure.
3. Que peut-on conclure si de plus  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ ? Justifier.

\*\*\*

EXERCICE 4. Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  on considère les fonctions :

$$g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad h_1(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad g_n(x) = n g_1(nx), \quad h_n(x) = h_1\left(\frac{x}{n}\right).$$

On définit aussi la suite de fonctions  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} h_n(u) h_1(v) e^{-i(x-v)u} \, d\lambda_2(u, v)$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n$  est bien définie.
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda = \pi$  et préciser la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$  en fonction de  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g_1(x) = \int_{\mathbb{R}} h_1(u) e^{-iux} \, d\lambda(u)$ . En déduire que  $g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(u) e^{-iux} \, d\lambda(u)$ .
4. En utilisant le théorème de Fubini et la question 2, montrer les deux égalités suivantes :

$$(a) \quad F_n(x) = \int_{\mathbb{R}} h_n(u) g_1(u) e^{-iux} \, d\lambda(u);$$

$$(b) \quad F_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x-v) h_1(v) \, d\lambda(v) = \int_{\mathbb{R}} g_1(t) h_1\left(x - \frac{t}{n}\right) \, d\lambda(t).$$

5. En déduire, en utilisant deux fois un théorème du cours, que  $h_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iux}}{1+u^2} \, d\lambda(u)$ .