Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques

Licence de mathématiques
$3^{\text{ème}}$ année
Calcul intégral

Devoir maison : Familles sommables

Introduction.

Vous avez déjà vu le concept de "somme d'une séries numériques convergente" de terme général u_n, $(n \in \mathbb{N})$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$$

La définition de cette somme est intimement liée au fait que l'on somme les termes de la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **dans un ordre précis** et que les termes sont indexés par des entiers $(n \in \mathbb{N})$; vous avez vu par exemple que la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ prend des valeurs différentes si on perturbe l'ordre des termes (elle n'est pas "commutativement convergente"). Les séries absolument convergentes sont celles pour lesquelles l'ordre est sans importance.

Cependant, les termes d'une somme ne sont pas toujours naturellement ordonnés, donnés par une suite, mais peuvent être indexés par un ensemble I plus compliqué qui ne possède pas d'ordre naturel comme par exemple dans des sommes doubles, triples... :

$$\sum_{\substack{p\geq 2\\ q\geq 2}} \frac{1}{p^q} \qquad \sum_{1\leq p\leq q} \frac{(-1)^p}{q^3} \qquad \sum_{2\leq p_1\leq p_2\leq\cdots\leq p_n} \frac{1}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^\alpha}.$$

Le but de ce devoir est de définir une notion de somme d'une infinité de nombres réels (ou complexes) qui ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on somme ces nombres, ni de la façon de les indexer, en étudiant le cas positif en premier, puis en généralisant aux nombres réels (ou complexes).

Le cas positif.

- **Arithmétique dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.** On convient de prolonger l'addition, la multiplication et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+$ à $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \sqcup \{+\infty\}$ en posant, pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$:

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty\ , \qquad a\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}, \qquad \text{et} \qquad a \leq +\infty$$

  L'avantage de travailler dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ réside dans le fait que **toute partie non vide A de $\overline{\mathbb{R}}_+$ admet une borne supérieure** $\sup A$, dont on rappelle la caractérisation suivante :

$$\underbrace{\forall a \in A \quad a \leq \sup A}_{\sup A \text{ est un majorant de } A} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{(x < \sup A) \Rightarrow \big(\exists a \in A \quad x < a \leq \sup A\big)}_{\text{c'est le plus petit}}$$

  Si $A \neq \varnothing$ est une partie bornée de $\mathbb{R}_+$, alors $\sup A \in \mathbb{R}_+$. Si A n'est pas bornée, alors $\sup A = +\infty$.

- **Définition de sommes (infinies) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ (ou de $\overline{\mathbb{R}}_+$) indexée par un ensemble quelconque I (fini ou non). On définit la "somme infinie" $S \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (au sens de la **sommabilité**) :

$$S = \sum_{i\in I} x_i := \sup\left\{\sum_{i\in J} x_i :\ J \subset I, J \text{ fini}\right\} \qquad (*)$$

  Si un des x_i vaut $+\infty$, la somme S vaut également $+\infty$ (mais la réciproque est fausse)

- **Remarque.** Le **support** d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est le sous ensemble $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ de I. Si le support est fini égal à $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i_j}$. En effet, on a l'égalité :

$$\left\{\sum_{i\in J} x_i :\ J \subset I, J \text{ fini}\right\} = \left\{\sum_{i\in J} x_i :\ J \subset \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}\right\}$$

  En d'autres termes, cette notion de "somme infinie" sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ généralise la notion de somme finie usuelle.

Exercice 1. Indépendance de l'ordre.
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\varphi : K \to I$ une bijection. En vous inspirant de la remarque précédente, montrer que

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} x_{\varphi(k)}. \tag{1}$$

Exercice 2. Propriétés de croissance de la somme.

1. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$ indexées par I.
   (a) Montrer l'implication :

$$\big(K \subset I\big) \Longrightarrow \left(\sum_{i\in K} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i\right) \qquad (K \text{ non nécessairement fini !}) \tag{2}$$

   (b) Dans le cas où $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$, montrer qu'il y a égalité si et seulement si K contient le support de $(x_i)_{i\in I}$.
2. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de $\overline{\mathbb{R}}_+$ indexées par I. Démontrer l'implication :

$$\big(\forall i \in I,\ y_i \leq x_i\big) \Longrightarrow \Big(\sum_{i\in I} y_i \leq \sum_{i\in I} x_i\Big). \tag{3}$$

Exercice 3. Linéarité pour des coefficients positifs

1. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$). Montrer que $\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha x_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i$ (4)
2. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de $\overline{\mathbb{R}}_+$ indexées par I.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i + y_i) \leq \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$;
   (b) Montrer que si J_1 et J_2 sont deux sous ensembles finis de I alors : $\displaystyle\sum_{i\in J_1} x_i + \sum_{i\in J_2} y_i \leq \sum_{i\in I}(x_i + y_i)$;
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$. (5)

Exercice 4. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{R}_+$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous ensembles de I dont la réunion est I — on notera par la suite $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} J_n$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} \sum_{i\in J_n} x_i$. (6)
2. En déduire que si la série de terme général $u_n \in \mathbb{R}_+$ converge alors sa somme S_1 (au sens de la sommabilité) définie par $(*)$ coïncide avec la somme S_2 (en tant que série) , c'est à dire

$$\underbrace{\sup\left\{\sum_{i\in J} u_i :\ J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini}\right\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = S_1}_{\text{somme au sens de la sommabilité}} = \underbrace{S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n}_{\text{somme au sens des séries}}$$

Exercice 5. Propriété de Fubini-Tonelli.
Soit $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ une famille doublement indexée de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Il s'agit de montrer que

$$\sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I} x_{i,k}\right). \tag{7}$$

1. Montrer ce résultat lorsque l'un des deux ensembles I ou K est fini (utiliser l'exercice 3).
2. En déduire que

(a) pour toute partie finie $A \subset I \times K$, $\displaystyle\sum_{(i,k)\in A} x_{i,k} \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right)$ puis que $\displaystyle\sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k} \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right)$;

(b) pour tout $J \subset I$, J fini on a : $\displaystyle\sum_{i\in J} y_i \leq \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k}$ où $y_i = \displaystyle\sum_{k\in K} x_{ik}$ (utiliser l'exercice 2) ; puis conclure.

Exercice 6. En utilisant les exercices précédents, montrer les résultats suivants :

1. **Théorème de Beppo-Levi**.
   Soit $(x_{i,n})_{(i,n)\in I\times\mathbb{N}}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Supposons que pour chaque $i \in I$, $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Alors :
   $$\lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} \sum_{i\in I} x_{i,n} = \sum_{i\in I} \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} x_{i,n} \tag{8}$$
   (on pourra poser $a_{i,n} = x_{i,n} - x_{i,n-1}$, $n > 0$ et $a_{i,0} = x_{i,0}$).
2. **Sommation par paquets**.
   Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Supposons que $I = \displaystyle\bigsqcup_{\ell\in L} I_\ell$. Alors : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell} x_i$. (9)
   (on pensera à poser $x_{i,\ell} = x_i \mathbb{1}_{I_\ell}(i)$).

Familles sommables dans $\mathbb{R}$

Pour x un réel, on notera $x^+ = \max\{x, 0\}$ et $x^- = \max\{-x, 0\}$. On a : $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$. Une famille de réels $(x_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i^+ < +\infty$ et $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i^- < +\infty$. On définit alors sa somme $S \in \mathbb{R}$:

$$S = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- \tag{$**$}$$

Exercice 7. Montrer que $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$.

Exercice 8.

1. Montrer qu'une série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ de réels a_n positifs est convergente de somme S si et seulement si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme S. (cf. Exercice 4)
2. En déduire qu'une série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ est absolument convergente de limite S si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme S.
3. Montrer que la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est convergente. Est-elle sommable ?

Exercice 9. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Il s'agit de montrer que si elle est sommable, alors son support I' de $(x_i)_{i\in I}$ défini par $I' = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable !

1. On pose $I_n = \{i \in I : x_i > \frac{1}{n+1}\}$. Montrer que $I' = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow} I_n$.
2. Montrer que $\operatorname{card} I_n < (n+1)\displaystyle\sum_{i\in I_n} x_i \leq (n+1)\sum_{i\in I} x_i$ et conclure.

Exercice 10. En utilisant la décomposition en parties positive et négative montrer que :

$$(x+y)^+ + x^- + y^- = (x+y)^- + x^+ + y^+ \qquad \text{et} \qquad (x \leq y) \Leftrightarrow (x^+ + y^- \leq y^+ + x^-).$$

En déduire les résultats suivants :

1. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de réels et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables de sommes S et T respectivement alors
   $$(\forall i \in I,\ x_i \leq y_i) \Rightarrow (S \leq T).$$

(b) Montrer que si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables de sommes S et T respectivement, alors $(x_i+y_i)_{i\in I}$ et $(\lambda x_i)_{i\in I}$ sont sommables de sommes $S+T$ et λS respectivement.

2. **Théorème de Fubini.** Ssoit $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ une famille de réels. Montrer que :

$$\Big(\sum_{(i,k)\in I\times K}|x_{i,k}|<+\infty\Big)\Rightarrow\Big(\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}x_{i,k}=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}x_{i,k}\Big) \tag{10}$$

3. **Sommation par paquets.** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Supposons que $I=\bigsqcup_{\ell\in L}I_\ell$. Alors :

$$\Big(\sum_{i\in I}|x_i|<+\infty\Big)\Rightarrow\Big(\sum_{i\in I}x_i=\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell}x_i\Big) \tag{11}$$

Exercice 11.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{p\geq 2\\ q\geq 2}}\frac{1}{p^q}$.

2. Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^3}\right)_{1\leq p\leq q}$ est sommable, et exprimer sa somme en fonction de $\zeta(3)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(n+1)^3}$.

Exercice 12. Pour $x\in]-1;1[$ montrer (en justifiant !) que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}d(n)x^n.$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs entiers positifs de n.

Exercice 13. Étudier la nature de la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(n+m)^\alpha}$ en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$ (poser $m+n=k$).

Exercice 14. Justifier que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n\neq p}}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4p^2}$.

En déduire que

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n\neq p}}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*\\ n\neq p}}\frac{1}{n^2-p^2}.$$

Que peut-on en déduire ?