Calcul intégral
Licence de mathématiques
3e année

O. Couture
Université de Bourgogne

Table des matières

1 Familles sommables **7**

1.1 Cas des familles de réels positifs . . . 8

1.1.1 Arithmétique de $\overline{\mathbb{R}}_+$ . . . 8

1.1.2 Sommations (infinies) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. . . . 9

1.1.3 Propriétés de la sommation . . . 11

1.2 Familles sommables dans $\mathbb{R}$ . . . 15

1.2.1 Familles sommables dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$. . . . 18

Les démonstrations du chapitre 1 . . . 19

2 Théorie de la mesure **29**

2.1 Tribu, espace mesurable, mesure. . . . 31

2.2 Tribu engendrée - Exemple des boréliens. . . . 35

2.3 Théorèmes d'unicité et de prolongement de mesures. . . . 37

2.3.1 Unicité de mesures. . . . 37

2.3.2 Prolongement de mesures. . . . 38

2.3.3 La mesure de Lebesgue. . . . 40

2.4 Fonctions mesurables. . . . 42

Les démonstrations du chapitre 2 . . . 48

3 L'intégrale de Lebesgue **65**

3.1 Intégrale de Lebesgue pour les fonctions positives . . . 65

3.1.1 Intégrale pour les fonctions étagées mesurables positives . . . 65

3.1.2 Intégrale pour les fonctions mesurables positives . . . 67

3.2 Intégrale de Lebesgue - Cas général. . . . 70

3.3 Exemples d'intégrations. . . . 72

3.3.1 Intégration par rapport à une mesure discrète . . . 72

3.3.2 Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue . . . 73

3.3.3 Mesures à densité . . . 75

Les démonstrations du chapitre 3 . . . 77

4 Le théorème de convergence dominée **85**

4.0 Rappel des théorèmes de convergence précédents . . . 85

4.1 Le théorème de convergence dominée . . . 86

4.2 Conséquences du théorème de convergence dominée . . . 87
Les démonstrations du chapitre 4 . . . 89

5 Le théorème de Fubini **95**
5.1 Produit de mesures σ-finies . . . 95
5.2 Le théorème de Fubini pour les intégrales . . . 96
5.3 Le théorème de changement de variable . . . 101
5.4 Exemples classiques . . . 104
5.4.1 les fonctions gamma et bêta d'Euler . . . 104
Les démonstrations du chapitre 5 . . . 107

Notations

- $[\![0;n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers de 0 à n.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} u_n$ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec l'information que la suite est croissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}{}^{\downarrow} u_n$ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec l'information que la suite est décroissante.
- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow} A_n$ est l'union des A_n pour une suite croissante d'ensembles.
- $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}{}^{\downarrow} A_n$ est l'intersection des A_n pour une suite décroissante d'ensembles.
- $\bigsqcup\limits_{i\in I} A_i$ est l'union des A_i pour une famille d'ensembles deux à deux disjoints.

Chapitre 1

Familles sommables

Vous avez déjà vu le concept de "somme d'une séries numériques convergente" de terme général u_n, $(n \in \mathbb{N})$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$$

La définition de cette somme est intimement liée au fait que l'on somme les termes de la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **dans un ordre précis** et que les termes sont indexés par des entiers $(n \in \mathbb{N})$; vous avez vu par exemple que la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ prend des valeurs différentes si on perturbe l'ordre des termes (elle n'est pas "commutativement convergente"). Les séries absolument convergentes sont celles pour lesquelles l'ordre est sans importance.

Cependant, les termes d'une somme ne sont pas toujours naturellement ordonnés, donnés par une suite, mais peuvent être indexés par un ensemble I plus compliqué qui ne possède pas d'ordre naturel comme par exemple dans des sommes doubles, triples... :

$$\sum_{\substack{p\geq 2\\ q\geq 2}} \frac{1}{p^q} \qquad \sum_{1\leq p\leq q} \frac{(-1)^p}{q^3} \qquad \sum_{2\leq p_1\leq p_2\leq\cdots\leq p_n} \frac{1}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^\alpha}.$$

Le but de ce chapitre est de définir une notion de somme d'une infinité de nombres réels (ou complexes) qui ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on somme ces nombres, ni de la façon de les indexer, en étudiant le cas positif en premier, puis en généralisant aux nombres réels (ou complexes).

Comme on le verra, cette façon de voir la notion de somme conduit assez naturellement à la notion de mesure, puis à la construction de l'intégrale que nous allons développer dans ce cours – l'intégrale de Lebesgue –. La façon de construire l'intégrale est très proche de celle de la sommation de ce chapitre : la sommabilité deviendra même un cas particulier de l'intégration !

1.1 Cas des familles de réels positifs

1.1.1 Arithmétique de $\overline{\mathbb{R}}_+$

On convient de prolonger à $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \sqcup \{+\infty\}$ l'addition, la multiplication et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}_+$ de façon suivante :

$$\text{Pour tout } a \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \qquad \begin{cases} a \leq +\infty \\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \\ a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \neq 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ a = 0} \end{cases} \end{cases}$$

* * * * * * * * * *

Attention : $0 \times (+\infty) = 0$ n'est valable que sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, on tombera sur des aberrations si on l'applique à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$!

L'avantage de travailler dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ réside dans le fait suivant.

Nota Bene

Toute partie non vide A de $\overline{\mathbb{R}}_+$ admet une borne supérieure $\sup A$

On rappelle la caractérisation suivante de la borne supérieure :

Caractérisation de la borne sup

$$\underbrace{\forall a \in A \quad a \leq \sup A}_{\sup A \text{ est un majorant de } A} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{(x < \sup A) \implies (\exists a \in A \quad x < a \leq \sup A)}_{\text{c'est le plus petit}}$$

Remarques 1.1.1

1. Pour $A \subset \mathbb{R}_+$ et $A \neq \varnothing$, dire que $\sup A = +\infty$ équivaut à dire que A n'est pas bornée.
2. Le fait d'être ordonné confère à $\overline{\mathbb{R}}_+$ une structure d'espace topologique, et même d'espace métrique, notamment pour la distance

$$\mathrm{d}(x; y) = \begin{cases} |\arctan y - \arctan x| & \text{si } x, y \in \mathbb{R}_+ \\ +\infty & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } y = +\infty, \text{ ou si } x = +\infty \text{ et } y \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{si } x = y = +\infty. \end{cases}$$

   Toute suite monotone de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}_+$!

Notations 1.1.2

1. Pour une suite **croissante** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on note, pour rappeler le caractère croissant :

$$\lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. De même, pour une suite **décroissante** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on note, pour rappeler le caractère décroissant
$$\lim_{n\to+\infty}{}^{\downarrow} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

1.1.2 Sommations (infinies) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 1.1.3: Sommabilité, cas positif

*Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ (ou de $\overline{\mathbb{R}}_+$) indexée par un ensemble quelconque I (fini ou non). On définit la "somme infinie" $S(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (au sens de la **sommabilité** – **cette somme a toujours un sens, dans** $\overline{\mathbb{R}}_+$) :*

$$S(x) = \sum_{i\in I} x_i := \sup\left\{\sum_{i\in J} x_i : \; J \subset I, J \text{ fini}\right\} \qquad (*)$$

*On dit que la famille x est **sommable** si $S(x)$ est finie.*

* * * * * * * * * *

Si un des x_i vaut $+\infty$, la somme $S(x)$ vaut également $+\infty$ (mais la réciproque est fausse).

Remarque 1.1.4

1. Le **support** d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est le sous ensemble $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ de I. Si le support est fini égal à $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i_j}$. En effet, on a l'égalité des deux ensembles :
$$\left\{\sum_{i\in J} x_i : \; J \subset I, \; J \text{ fini}\right\} = \left\{\sum_{i\in J} x_i : \; J \subset \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}\right\}$$
qui ont un nombre fini d'éléments et même borne supérieure (qui ici est le plus grand élément). En d'autres termes, cette notion de "sommation infinie" sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ généralise la sommation usuelle.
2. On convient qu'une famille indexée par l'ensemble vide ($I = \varnothing$) est sommable de somme nulle (c'est une « somme vide » !). Cela permet d'éviter de tergiverser sur des cas très particuliers de certaines propositions ou démonstrations : par exemple dans (2a) de la proposition 1.1.6 reste vrai lorsque K est vide, ou lorsque le support est vide.

Exemples 1.1.5

1. Lien avec les séries

   Nota Bene
   Pour les **suites** de réels **positifs**, les notions de **série convergente** et de **famille sommable** se confondent.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **positifs**. Pour distinguer les sommes au sens des séries (à gauche ci-dessous) et des familles sommables (à droite ci-dessous), on utilisera les notations suivantes :

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n := \sup\left\{ \sum_{n\in J} u_n \;:\; J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini} \right\}.$$

On note $\quad \Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la somme partielle jusqu'à l'entier N. On peut remarquer que comme les termes u_n sont positifs, la suite $(\Sigma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante. D'autre part, $\{0, 1, \dots, N\}$ étant fini, on a :

$$\Sigma_N \in \left\{ \sum_{n\in J} u_n \;:\; J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini} \right\} \quad \text{donc} \quad \Sigma_N \leq S(u) = \sup\left\{ \sum_{n\in J} u_n \;:\; J \subset I, J \text{ fini} \right\}.$$

On a deux cas de figure
— soit $(\Sigma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ diverge (en croissant) vers $\Sigma = +\infty$ auquel cas $\Sigma = S(u) = +\infty$.
— soit $(\Sigma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge (en croissant) vers une limite finie Σ autrement dit la série de terme général u_n **converge** et alors

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \uparrow \sum_{n=0}^{N} u_n \leq S(u).$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Pour tout sous-ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$, on pose $N_J = \max J$. Alors $J \subset \{0, 1, \dots, N_J\}$ donc

$$\sum_{n\in J} u_n \leq \sum_{n=0}^{N_J} u_n = \Sigma_{N_J} \leq \Sigma$$

Autrement dit, Σ est un majorant de l'ensemble $\left\{ \sum_{n\in J} u_n \;:\; J \subset I, J \text{ fini} \right\}$. On en déduit, en passant à la borne supérieure que la famille (suite) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **sommable** de somme $S(u)$ satisfaisant

$$S(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup\left\{ \sum_{n\in J} u_n \;:\; J \subset I, J \text{ fini} \right\} \leq \Sigma.$$

Par conséquent $S(u) = \Sigma$ autrement dit **la série de terme général positif u_n converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, et dans ce cas les sommes de $(*)$ coïncident**.

2. Soit $a > 1$. La famille $\left(\dfrac{1}{a^p + a^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. En effet,

$$\forall p \geq \mathbb{N} \quad \forall q \geq N \qquad \frac{1}{a^p + a^q} \leq \frac{1}{2 \cdot a^{\frac{p+q}{2}}} \qquad \left(\quad a^p + a^q - 2 \cdot a^{\frac{p+q}{2}} = \left(a^{\frac{p}{2}} - a^{\frac{q}{2}}\right)^2 \geq 0 \quad \right)$$

Pour tout J fini dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset [\![0; N]\!] \times [\![0; N]\!]$. On a alors successivement :

$$\sum_{(p,q)\in J} \frac{1}{a^p + a^q} \leq \sum_{\substack{0\leq p\leq N \\ 0\leq q\leq N}} \frac{1}{2a^{\frac{p+q}{2}}} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^p\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^q\right)$$

$$\sum_{(p,q)\in J} \frac{1}{a^p + a^q} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^p\right)\left(\sum_{p=0}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^q\right) \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n\right)^2 = \frac{a}{2(\sqrt{a}-1)^2}.$$

En passant à la borne supérieure pour tous les sous-ensembles finis $J \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ il vient :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p + a^q} = \sup\left\{\sum_{(p,q)\in J} \frac{1}{a^p + a^q} : J \subset \mathbb{N}^2,\ J \text{ fini}\right\} \leq \frac{a}{2(\sqrt{a}-1)^2}.$$

1.1.3 Propriétés de la sommation

Proposition 1.1.6: Premières propriétés de la sommation

1. *Indépendance par rapport à l'indexation.*
   Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et* $\varphi : K \to I$ *une bijection. Alors* $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} x_{\varphi(k)}$.
2. *Croissance de la somme :*
   (a) *Par rapport à l'indexation.*
   Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *indexées par* I.

   $$\big(K \subset I\big) \implies \left(\sum_{i\in K} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i\right) \qquad \textit{(K non nécessairement fini !)}$$

   De plus, si K *contient le* support *de* $(x_i)_{i\in I}$, *il y a égalité.*
   Réciproquement, s'il y a égalité et si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$, *alors* K *contient le* support *de* $(x_i)_{i\in I}$.

   (b) *Par majoration terme à terme.*
   Soient $(x_i)_{i\in I}$ *et* $(y_i)_{i\in I}$ *deux familles de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *indexées par* I.

   $$\big(\forall i \in I,\ y_i \leq x_i\big) \implies \left(\sum_{i\in I} y_i \leq \sum_{i\in I} x_i\right).$$

Voir la démonstration (page 19)

Proposition 1.1.7: Linéarité pour des coefficients positifs

1. *Produit par un scalaire positif.*

   Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *(ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). Alors* $\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha x_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i$.

2. *Additivité.*

   (a) *Famille des sommes. Soient* $(x_i)_{i\in I}$ *et* $(y_i)_{i\in I}$ *deux familles de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *indexées par* I*. Alors*

   $$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$

   (b) *Sommation en deux paquets. Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *indexées par* $I = I_1 \sqcup I_2$ *(union disjointe :* $I = I_1 \cup I_2$ *et* $I_1 \cap I_2 = \varnothing$*). Alors*

   $$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I_1} x_i + \sum_{i\in I_2} x_i.$$

Voir la démonstration (page 21)

Notations 1.1.8

1. Par la suite $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} J_n$ signifie que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** de sous-ensembles d'un ensemble I, dont la réunion est I.
2. De même $I = \displaystyle\bigsqcup_{\ell\in L} I_\ell$ signifie que I est l'union disjointe des I_ℓ lorsque ℓ parcourt L.

Remarque 1.1.9: Reformulation et généralisation des propriétés d'additivité

(a) Si on réunit les familles de $\overline{\mathbb{R}}_+$ $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ en une seule famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times\{1,2\}}$ en posant $x_{i,1} = x_i$ et $x_{i,2} = y_i$, la première formule d'additivité s'écrit

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{k\in\{1,2\}} x_{i,k}\Big) = \sum_{k\in\{1,2\}}\Big(\sum_{i\in I} x_{i,k}\Big).$$

On en déduit la propriétés d'additivité plus générale suivante pour toute famille $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ de $\overline{\mathbb{R}}_+$ **avec** K **fini** en faisant une récurrence sur le nombre d'éléments de K :

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{k\in K} x_{i,k}\Big) = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in I} x_{i,k}\Big).$$

(b) De même si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $I = I_1 \sqcup I_2$ la seconde formule d'additivité s'écrit

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\ell\in\{1,2\}} \Big(\sum_{i\in I_\ell} x_i\Big).$$

On en déduit la formule de sommation par paquets pour nombre fini de paquets suivante si $I = \bigsqcup_{\ell\in L} I_\ell$ **avec** L **fini** en faisant une récurrence sur le nombre d'éléments de L :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\ell\in L} \Big(\sum_{i\in I_\ell} x_i\Big).$$

Ces deux propriétés se généralisent encore avec la proposition 1.1.12 et (2) de la proposition 1.1.13 ci-dessous .

Proposition 1.1.10: Utilisation de limites croissantes

Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et supposons que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} J_n$. Alors $\sum_{i\in I} x_i = \lim_{n\to+\infty}^{\uparrow} \sum_{i\in J_n} x_i$.

Voir la démonstration (page 23)

Exemples 1.1.11

1. Dans 2 de l'exemple 1.1.5, avec $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $J_n = [\![0;n]\!]\times[\![0;n]\!]$

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p + a^q} = \lim_{n+\infty}^{\uparrow} \sum_{(p,q)\in[\![0;n]\!]^2} \frac{1}{a^p + a^q} \le \lim_{n\to+\infty}^{\uparrow} \sum_{(p,q)\in[\![0;n]\!]^2} \frac{1}{2a^{\frac{p+q}{2}}} = \frac{a}{2(\sqrt{a}-1)^2}.$$

2. Lorsque $I = \mathbb{N}$, on retrouve 1 de l'exemple 1.1.5) : la somme d'une série convergente de terme général **positif** $u_n \in \mathbb{R}_+$ coïncide avec la somme au sens de la sommabilité

$$\underbrace{\sup\Big\{\sum_{i\in J} u_i :\ J\subset\mathbb{N}, J \text{ fini}\Big\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i}_{\text{somme au sens de la sommabilité}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} u_i}_{\text{somme au sens des séries}}$$

Proposition 1.1.12: Propriété de Fubini-Tonelli pour les familles de réels positifs

Soit $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ une famille doublement indexée de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors

$$\sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k} = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{k\in K} x_{i,k}\Big) = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in I} x_{i,k}\Big).$$

Voir la démonstration (page 24)

Proposition 1.1.13

1. ***Théorème de Beppo Levi***. *Soit* $(x_{i,n})_{(i,n)\in I\times\mathbb{N}}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Supposons que pour chaque* $i \in I$, $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} \sum_{i\in I} x_{i,n} = \sum_{i\in I} \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} x_{i,n}$$

2. ***Sommation par paquets***. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Supposons que* $(I_\ell)_{\ell\in L}$ *est une partition de* I *(on notera* $I = \bigsqcup_{\ell\in L} I_\ell$ *par la suite :* I *est l'union disjointe des* I_ℓ*). Alors :*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell} x_i.$$

Voir la démonstration (page 26)

Exemple 1.1.14: Produit de Cauchy (ou de convolution discrète) dans le cas positif

On considère deux suites de réels positifs $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ $v = (v_q)_{q\in\mathbb{N}}$. On définit le produit de Cauchy de la série associée à u et de la série associée à v comme étant la série de terme général positif

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

On a alors la relation :

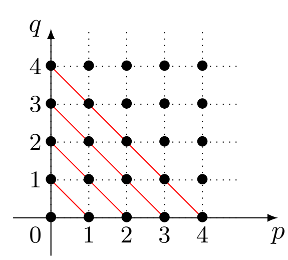
$$\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p\Big)\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n.$$

En effet, le théorème de Fubini-Tonelli nous dit que

$$\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_n\Big)\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q.$$

Si on pose $n = p + q$, on peut remarquer que

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{(p,q)\in\mathbb{N}^2 : p+q=n\}$$



(on parcourt $\mathbb{N}^2$ le long des droits de pente -1, cf. ci-contre) et la propriété de sommation par paquets donne :

$$\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p\Big)\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\\ p+q=n}} u_p v_q = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n.$$

Proposition 1.1.15: Support dénombrable

*Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de réels positifs. Alors le support I' de $(x_i)_{i\in I}$ défini par*

$$I' = \{i \in I : x_i \neq 0\} \qquad \text{est au plus dénombrable!}$$

* * * * * * * * * *

Par la suite, on supposera sans perte de généralité que l'ensemble I est dénombrable (quitte à le remplacer par son support), le cas non dénombrable ne donnant que des familles non sommables.

La démonstration est laissée en exercice (voir feuille de TD n°1)

1.2 Familles sommables dans $\mathbb{R}$

Pour tout réel a, on notera $a^+ = \max\{a, 0\} \in \mathbb{R}_+$ (partie positive) et $a^- = \max\{-a, 0\} \in \mathbb{R}_+$ (partie négative), autrement dit :

$$\begin{cases} a^+ = a & \text{si } a \geq 0 \\ a^+ = 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^- = 0 & \text{si } a \geq 0 \\ a^- = |a| = -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad a = a^+ - a^- \text{ et } |a| = a^+ + a^-.$$

Exercice 1.2.1

En utilisant la décomposition en parties positive et négative montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^+ + a^- + b^- = (a+b)^- + a^+ + b^+ \qquad \text{et} \qquad (a \leq b) \Leftrightarrow (a^+ + b^- \leq b^+ + a^-).$$

Plus généralement, si $x = (x_i)_{i\in I}$ est une famille de réels, on note x^+ et x^- et $|x|$ les familles de réels positifs $x^+ = (x_i^+)_{i\in I}$, $\quad x^- = (x_i^-)_{i\in I} \quad$ et $\quad |x| = (|x_i|)_{i\in I}$.

Définition 1.2.2: Famille sommable

*Une famille de réels $x = (x_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si les deux familles x^+ et x^- le sont (en tant que familles positives), autrement dit*

$$\sum_{i\in I} x_i^+ < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} x_i^- < +\infty.$$

On définit alors sa somme $S(x) \in \mathbb{R}$: $\quad S(x) := \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$

En remarquant que pour tout famille de réels $x = (x_i)_{i\in I}$, on a

$$\max\left(\sum_{i\in I} x_i^+ \,,\, \sum_{i\in I} x_i^-\right) \leq \sum_{i\in I} |x_i| = \sum_{i\in I} x_i^+ + \sum_{i\in I} x_i^-$$

on obtient la caractérisation suivante de sommabilité :

Proposition 1.2.3: Caractérisation de la sommabilité

La famille $x = (x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $|x| = (|x_i|)_{i\in I}$ l'est, à savoir si et seulement si

$$\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty.$$

Exercice 1.2.4

1. Montrer qu'une série de terme général a_n est absolument convergente de somme S si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme S (utiliser la proposition 1.1.10) .
2. Montrer que la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est convergente. Est-elle sommable ?

Proposition 1.2.5: Croissance et linéarité

Soient $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ deux familles de réels sommables de sommes $S(x)$ et $S(y)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

1. *propriété de croissance :* $\quad (\forall i \in I,\ x_i \leq y_i) \implies (S(x) \leq S(y))$
2. *linéarité :* $x + y = (x_i + y_i)_{i\in I}$ *et* $\lambda x = (\lambda x_i)_{i\in I}$ *sont sommables de sommes* $S(x) + S(y)$ *et* $\lambda S(x)$ *respectivement.*

* * * * * * * * * *

Attention : cela n'a pas de sens pour des familles non sommables. De plus $x + y$ peut être sommable sans que x et y le soient.

Voir la démonstration (page 27)

Théorème 1.2.6: Théorème de Fubini - Sommation par paquets

1. *Soit $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ une famille de réels. Alors*

$$\Big(\sum_{(i,k)\in I\times K} |x_{i,k}| < +\infty\Big) \implies \Big(\sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k} = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{i,k} = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I} x_{i,k}\Big)$$

toutes les familles intervenant dans le membre de droite de cette implication étant sommables si le membre de gauche est satisfait.

2. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Supposons que $I = \bigsqcup_{\ell\in L} I_\ell$. Alors :*

$$\Big(\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty\Big) \implies \Big(\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell} x_i\Big)$$

Voir la démonstration (page 28)

Autrement dit, on peut permuter les sommes si la famille est sommable, en faisant bien attention au fait que les indices peuvent être liés. Pour montrer la sommabilité, on utilise généralement les propriété de Fubini-Tonelli et de sommation par paquet dans le cas positif.

Exemple 1.2.7: Produit de Cauchy (ou de convolution discrète) dans le cas général

On considère deux suites de réels $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ $v = (v_q)_{q\in\mathbb{N}}$. On définit le produit de Cauchy de la série associée à u et de la série associée à v comme étant la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Si les familles u et v sont sommables (i.e. les séries associées à u et v sont absolument convergentes) autrement dit si $\sum_{p\in\mathbb{N}} |u_p| < +\infty$ et $\sum_{q\in\mathbb{N}} |v_q| < +\infty$, alors la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable c'est à dire $\sum_{n\in\mathbb{N}} |w_n| < +\infty$ et on a alors la relation :

$$\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p\Big)\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n.$$

En effet, sous les hypothèses de sommabilité de u et v, le théorème de Fubini assure la sommabilité de la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ et on a :

$$\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_n\Big)\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q.$$

On pose $n = p + q$. Comme la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (avec les conditions de sommabilité ci-dessus), la propriété de sommation par paquets donne, comme dans le cas positif :

$$\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p\Big)\Big(\sum_{q\in\mathbb{N}} v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} u_p v_q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n.$$

Attention : tout ceci n'est valable que sous la condition de sommabilité ! La convergence des séries ne suffit pas. Par exemple, si $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge (en vertu du critère des séries alternées) bien que les familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas sommables, puisqu'elle ne sont pas absolument convergentes (par application de la règle de Riemann). Or le produit de Cauchy diverge (et n'est donc pas sommable) ; en effet, il a pour terme général

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \qquad \text{vérifiant} \qquad |w_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$$

(car $(x+1)(n-x+1)$ atteint son maximum en $n/2$) donc w_n ne tend même pas vers 0.

1.2.1 Familles sommables dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.8

1. *On dit que la famille de complexes $z = (z_k)_{k\in K}$ est* sommable *si* $\displaystyle\sum_{k\in K} |z_k| < +\infty$*. On définit alors sa somme $S(z) \in \mathbb{C}$:* $\displaystyle S(z) = \sum_{k\in K} \mathrm{Re}(z_k) + \mathrm{i} \sum_{k\in K} \mathrm{Im}(z_k).$
2. *On dit que la famille de vecteurs $u = (u_k)_{k\in K}$ de $\mathbb{R}^n$ est* sommable *si* $\displaystyle\sum_{k\in K} \|u_k\| < +\infty$ *pour une norme quelconque. On définit alors sa somme $S(u) \in \mathbb{R}^n$:*
$$S(u) = \sum_{k\in K} u_k = \Big(\sum_{k\in K} u_k^1 \,,\, \sum_{k\in K} u_k^2 \,,\, \dots \,,\, \sum_{k\in K} u_k^n \Big) \in \mathbb{R}^n$$
où $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^n) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $k \in K$.

Remarques 1.2.9

1. Si $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, $(z_k)_{k\in K}$ est *sommable* si et seulement si les familles $(x_k^+)_{k\in K}$, $(x_k^-)_{k\in K}$, $(y_k^+)_{k\in K}$ et $(y_k^-)_{k\in K}$ le sont dans $\mathbb{R}_+$.
2. L'exemple du produit de Cauchy reste valable dans le cas complexe.
3. Cette définition est indépendante de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$: elles sont toutes équivalentes en dimension finie. On peut d'ailleurs généraliser à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, en choisissant une base et une norme, la définition étant indépendant de ces choix (par linéarité des familles sommables cf. proposition 1.2.5 et équivalence des normes).
4. On peut même étendre la définition 2 aux espaces normés complets (espaces de Banach) de dimension infinie. Attention cependant, dans ce cas on n'a plus l'indépendance par rapport à la norme.

Les démonstrations du chapitre 1

Proposition: Premières propriétés de la sommation

1. *Indépendance par rapport à l'indexation.*
   Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\varphi : K \to I$ une bijection. Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} x_{\varphi(k)}$.
2. *Croissance de la somme.*
   (a) *Par rapport à l'indexation.*
   Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}}_+$ indexées par I. On a l'implication :
   $$\big(K \subset I\big) \implies \left(\sum_{i\in K} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i\right) \qquad (K \text{ non nécessairement fini!})$$
   De plus, si K contient le support *de $(x_i)_{i\in I}$, il y a égalité.*
   Réciproquement, s'il y a égalité et si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$, alors K contient le support *de $(x_i)_{i\in I}$.*
   (b) *Par majoration terme à terme.*
   Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de $\overline{\mathbb{R}}_+$ indexées par I. On a l'implication :
   $$\big(\forall i \in I,\ y_i \leq x_i\big) \implies \Big(\sum_{i\in I} y_i \leq \sum_{i\in I} x_i\Big).$$

Démonstration. *Retour page 11*

1. *Il suffit de remarquer que φ envoie les parties finies de K sur celle de I. Autrement dit, si on note L une partie de K et $J = \varphi(L)$, alors L est une partie finie de K si et seulement si J est une partie finie de I, si bien que*
   $$\left\{\sum_{k\in L} x_{\varphi(k)} :\ L \subset K,\ L \text{ fini}\right\} = \left\{\sum_{i\in J} x_i :\ J \subset I,\ J \text{ fini}\right\}.$$
   Ces deux ensembles ont donc même borne supérieure d'où l'égalité $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} x_{\varphi(k)}$.
2. (a) *Si $K \subset I$ alors toute partie finie de K est aussi une partie finie de I donc*
   $$\left\{\sum_{i\in J} x_i :\ J \subset K,\ J \text{ fini}\right\} \subset \left\{\sum_{i\in J} x_i :\ J \subset I,\ J \text{ fini}\right\}.$$
   La borne supérieure du membre de gauche est donc inférieure à celle du membre de droite c'est à dire
   $$\sum_{i\in K} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i.$$

Si K contient le support de $(x_i)_{i\in I}$ et si J est une partie finie de I, alors $\displaystyle\sum_{i\in J\cap K} x_i = \sum_{i\in J} x_i$.
Ainsi, en notant $L = J \cap K$,

$$\left\{\sum_{i\in J} x_i :\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\} = \left\{\sum_{i\in J\cap K} x_i :\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\} = \left\{\sum_{i\in L} x_i :\ L\subset K,\ L \text{ fini}\right\}.$$

Ces deux ensembles ont donc même borne supérieure donc $\displaystyle\sum_{i\in K} x_i = \sum_{i\in I} x_i$.
Réciproquement, supposons que $\displaystyle\sum_{i\in K} x_i = \sum_{i\in I} x_i < +\infty$. *Si $K = I$, il n'y a rien a faire bien sûr. Soit donc $i_0 \in I \setminus K$. En appliquant ce qui précède, on a*

$$\sum_{i\in K} x_i \leq x_{i_0} + \sum_{i\in K} x_i = \sum_{i\in K\cup\{i_0\}} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i.$$

Or par hypothèse,

$$\sum_{i\in K} x_i = \sum_{i\in I} x_i < +\infty$$

donc on peut remplacer la première inégalité par une égalité de nombres réels positifs,

$$\sum_{i\in K} x_i = x_{i_0} + \sum_{i\in K} x_i = \sum_{i\in K\cup\{i_0\}} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i \in \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent $x_{i_0} = 0$. Donc i_0 n'est pas dans le support de $(x_i)_{i\in I}$. Ainsi K contient tout le support.

(b) *Si $y_i \leq x_i$ pour tout $i \in I$ alors pour tout $J \subset I$, J fini,* $\displaystyle\sum_{i\in J} y_i \leq \sum_{i\in J} x_i$. *On en déduit que*

$$\sum_{i\in I} y_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} y_i :\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{i\in J\cap K} x_i :\ J\subset I,\ J \text{ fini}\right\} = \sum_{i\in I} x_i.$$

$\square$

Proposition: Linéarité pour des coefficients positifs

1. *Produit par un scalaire positif.*

   Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *(ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). Alors* $\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha x_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i$.

2. *Additivité.*

   (a) *Famille des sommes. Soient* $(x_i)_{i\in I}$ *et* $(y_i)_{i\in I}$ *deux familles de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *indexées par* I*. Alors*

   $$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$

   (b) *Sommation en deux paquets. Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *indexées par* $I = I_1 \sqcup I_2$ *(union disjointe :* $I = I_1 \cup I_2$ *et* $I_1 \cap I_2 = \varnothing$*). Alors*

   $$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I_1} x_i + \sum_{i\in I_2} x_i.$$

Démonstration. Retour page 12

1. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et toute partie finie* $J \subset I$*, on a* $\displaystyle\alpha \sum_{i\in J} x_i = \sum_{i\in J} \alpha\, x_i$*. on en déduit immédiatement que* $\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha x_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i$.

> ***Nota Bene***
> *La méthode de démonstration ci-dessous est très classique et se retrouve dans bien d'autres démonstrations, notamment en topologie pour la continuité de la distance d'un point à un fermé.*

2. (a) *Notons* $\displaystyle S(x) = \sum_{i\in I} x_i$, $\displaystyle S(y) = \sum_{i\in I} y_i$ *et* $\displaystyle S(x+y) = \sum_{i\in I}(x_i + y_i)$.

   - $S(x+y) \le S(x) + S(y)$. *En effet, pour toute partie finie* $J \subset I$ *on a*

     $$\sum_{i\in J}(x_i + y_i) = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J} y_i \le S(x) + S(y)$$

     $S(x) + S(y)$ *est donc majorant de* $\left\{\displaystyle\sum_{i\in J}(x_i + y_i) \,:\, J \subset I,\ J \text{ fini}\right\}$*. D'où* $S(x+y) \le S(x) + S(y)$.
   - *Si* J_1 *et* J_2 *sont deux sous ensembles finis de* I *alors :* $\displaystyle\sum_{i\in J_1} x_i + \sum_{i\in J_2} y_i \le S(x+y)$.
     En effet $J = J_1 \cup J_2$ *est une partie finie de* I *contenant* J_1 *et* J_2 *donc*

     $$\sum_{i\in J_1} x_i + \sum_{i\in J_2} y_i \le \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J} y_i = \sum_{i\in J}(x_i + y_i) \le S(x+y).$$

- *Enfin :* $S(x) + S(y) \leq S(x+y)$. *En effet, si* $S(x+y) = +\infty$ *il n'y a rien à faire, sinon on commence par fixer* J_2 *fini dans* I. *Pour tout* J_1 *fini dans* I, *on a*

$$\sum_{i\in J_1} x_i + \sum_{i\in J_2} y_i \leq S(x+y) < +\infty \quad \text{c'est à dire} \quad \sum_{i\in J_1} x_i \leq S(x+y) - \sum_{i\in J_2} y_i \in \mathbb{R}_+.$$

$S(x+y) - \sum_{i\in J_2} y_i$ *est donc majorant de* $\left\{ \sum_{i\in J_1} x_i : J_1 \subset I,\ J_1 \text{ fini} \right\}$ *donc*

$$S(x) \leq S(x+y) - \sum_{i\in J_2} y_i \quad \text{ou encore} \quad \sum_{i\in J_2} y_i \leq S(x+y) - S(x).$$

Si on fait varier J_2 *on a donc* $S(x+y) - S(x)$ *majorant de* $\left\{ \sum_{i\in J_2} y_i : J_2 \subset I,\ J_2 \text{ fini} \right\}$ *donc*

$$S(y) \leq S(x+y) - S(x) \quad \text{ou encore} \quad S(x) + S(y) \leq S(x+y).$$

(b) *Pour tout* $i \in I$, *on pose* $x'_i = x_i \times \mathbb{1}_{I_1}(i)$ *et* $x''_i = x_i \times \mathbb{1}_{I_2}(i)$. *On a* $x_i = x'_i + x''_i$ *et peut appliquer le cas précédent à ces deux familles :*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x'_i + \sum_{i\in I} x''_i = \sum_{i\in I_1} x_i + \sum_{i\in I_2} x_i.$$

(la seconde égalité vient du fait que I_1 *contient le support de* $(x'_i)_{i\in I}$ *et* I_2 *contient le support de* $(x''_i)_{i\in I}$*).*

$\square$

Proposition: Utilisation de limites croissantes

Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et supposons que* $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} J_n$. *Alors* $\sum_{i\in I} x_i = \lim_{n\to+\infty}^{\uparrow} \sum_{i\in J_n} x_i$.

Démonstration. *Retour page 13*
Notons $S_n(x) = \sum_{i\in J_n} x_i$ *et* $S(x) = \sum_{i\in I} x_i$.
En vertu de la propriété de croissance de la somme de la proposition 1.1.6, la suite de terme général $S_n(x)$ *est croissante et majorée par* $S(x)$ *donc elle converge dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$.
Si on note $\Sigma(x) = \lim_{n\to+\infty}^{\uparrow} S_n(x)$, *on a aussi*

$$\Sigma(x) \leq S(x).$$

Réciproquement, soit $J \subset I$, J *fini. Alors il existe une* $n_J \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_J$, $J \subset J_n$
Ainsi,

$$\forall n \geq n_J \qquad \sum_{i\in J} x_i \leq S_n(x) \leq \Sigma(x).$$

On en déduit que $S(x) \leq \Sigma(x)$. *D'où l'égalité.* □

Proposition: Propriété de Fubini-Tonelli pour les familles de réels positifs

Soit $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ *une famille doublement indexée de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors*

$$\sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I} x_{i,k}\right).$$

Démonstration. Retour page 13

- *Commençons par le cas où l'un des deux ensembles* I *ou* K *est fini, disons* $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$ *pour fixer les idées.*
  La seconde égalité est une simple récurrence sur le nombre d'éléments de K *utilisant la propriété d'additivité de la proposition 1.1.7 (cf. remarque 1.1.9) :*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{i,k_j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i\in I} x_{i,k_j}\right) = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I} x_{i,k}\right)$$

  Montrons maintenant la première égalité en procédant par double inégalité.
  — *pour tout* $J \subset I$, J *fini,* $J \times K$ *est également fini donc :*

$$\boxed{\sum_{i\in J}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) = \sum_{(i,k)\in J\times K} x_{i,k} \leq \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k}.}$$

  En passant à la borne supérieure sur J, *il vient :*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) \leq \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k}.$$

  — *pour tout* $A \subset I \times K$, A *fini, il existe* $J \subset I$, J *fini tel que* $A \subset J \times K$ *donc :*

$$\sum_{(i,k)\in A} x_{i,k} \leq \sum_{i\in J\times K} x_{i,k} = \sum_{i\in J}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right).$$

  En passant à la borne supérieure sur A, *il vient :*

$$\boxed{\sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k} \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right).}$$

- *Passons maintenant au cas général. Montrons la première égalité à nouveau par double inégalité.*
  — *Montrons d'abord que*

$$\sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k} \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right).$$

  Soit $A \subset I \times K$, A *fini. Alors il existe des sous ensembles finis* $J \subset I$ *et* $L \subset K$ *tels que* $A \subset J \times L \subset I \times K$. *Ainsi :*

$$\sum_{(i,k)\in A} x_{i,k} \leq \sum_{(i,k)\in J\times L} x_{i,k} = \sum_{i\in J}\left(\sum_{k\in L} x_{i,k}\right) \leq \sum_{i\in J}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) \leq \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right).$$

— *Montrons ensuite que*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{i,k}\right) \leq \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k}.$$

Pour tout $J \subset I$, J *fini, en utilisant la propriété d'additivité du premier point à* $J \times K$ *avec* J *fini, et la propriété de croissance sur l'ensemble des indices* ($J \times K \subset I \times K$), *il vient :*

$$\sum_{i\in J}\left(\sum_{k\in K} x_{ik}\right) = \sum_{(i,k)\in J\times K} x_{ik} \leq \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{i,k}.$$

Ainsi en passant à la borne supérieure sur J, *on obtient :*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{ik}\right) \leq \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{ik}.$$

— *En combinant les deux inégalités, on a bien :*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} x_{ik}\right) = \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{ik}$$

- *Comme les sommes sont indépendantes de l'indexation* ($I \times K$ *est en bijection avec* $K \times I$), *et que* I *et* K *ont des rôles symétriques, on a également :*

$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I} x_{ik}\right) = \sum_{(k,i)\in K\times I} x_{ik} = \sum_{(i,k)\in I\times K} x_{ik}.$$

□

Proposition

1. ***Théorème de Beppo Levi***. *Soit* $(x_{i,n})_{(i,n)\in I\times\mathbb{N}}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Supposons que pour chaque* $i \in I$, $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} \sum_{i\in I} x_{i,n} = \sum_{i\in I} \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} x_{i,n}$$

2. ***Sommation par paquets***. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Supposons que* $I = \bigsqcup_{\ell\in L} I_\ell$. *Alors :*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell} x_i.$$

<u>*Démonstration.*</u> *Retour page 14*

1. *On pose* $a_{i,n} = x_{i,n} - x_{i,n-1}$, $n > 0$, $a_{i,0} = x_{i,0}$. *Alors :* $x_{i,n} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p}$ *et* $\lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} x_{i,n} = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{i,p}$.

   Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} x_{i,n} = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{i,n} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I} a_{i,n} &= \lim_{p\to+\infty}{}^{\uparrow} \sum_{n=0}^{p}\sum_{i\in I} a_{i,n} \\ &= \lim_{p\to+\infty}{}^{\uparrow} \sum_{i\in I}\sum_{n=0}^{p} a_{i,n} = \lim_{p\to+\infty}{}^{\uparrow} \sum_{i\in I} x_{i,p}\end{aligned}$$

2. *Pour* $(i,\ell) \in I \times L$, *posons :* $x_{i,\ell} = x_i \mathbb{1}_{I_\ell}(i)$. *On a* $\sum_{\ell\in L} x_{i,\ell} = x_i \sum_{\ell\in L} \mathbb{1}_{I_\ell}(i) = x_i$ *car* $I = \bigsqcup_{\ell\in L} I_\ell$.

   En appliquant Fubini-Tonelli :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I}\sum_{\ell\in L} x_{i,\ell} = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I} x_{i,\ell} = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I} x_i \mathbb{1}_{I_\ell}(i) = \sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell} x_i.$$

$\square$

Proposition 1.2.10: Croissance et linéarité

Soient $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ deux familles de réels sommables de sommes $S(x)$ et $S(y)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

1. *propriété de croissance :* $(\forall i \in I,\ x_i \leq y_i) \implies (S(x) \leq S(y))$
2. *linéarité : $x + y = (x_i + y_i)_{i\in I}$ et $(\lambda x_i)_{i\in I}$ sont sommables de sommes $S(x) + S(y)$ et $\lambda S(x)$ respectivement.*

* * * * * * * * * *

Attention : cela n'a pas de sens pour des familles non sommables. De plus $x + y$ peut être sommable sans que x et y le soient.

Démonstration. *Retour page 16*

Toute l'astuce consiste à éviter les soustractions, en les transformant en addition.

1. *On sait grâce à l'exercice 1.2.1 que* $(x_i \leq y_i) \Leftrightarrow (x_i^+ + y_i^- \leq y_i^+ + x_i^-)$.
   Ainsi
   $$\begin{aligned}(\forall i \in I,\ x_i \leq y_i) &\implies (\forall i \in I,\ x_i^+ + y_i^- \leq y_i^+ + x_i^-)\\ &\implies \left(\sum_{i\in I} x_i^+ + \sum_{i\in I} y_i^- \leq \sum_{i\in I} y_i^+ + \sum_{i\in I} x_i^-\right)\end{aligned}$$
   Comme les familles x et y sont sommables, toutes les sommes du membre de droites sont finies et donc on a
   $$(\forall i \in I,\ x_i \leq y_i) \implies \left(S(x) = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- \leq \sum_{i\in I} y_i^+ - + \sum_{i\in I} y_i^- = S(y)\right).$$
2. *De l'inégalité triangulaire, on tire :*
   $$\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^+ + \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^- = \sum_{i\in I} |x_i + y_i| \leq \sum_{i\in I} |x_i| + \sum_{i\in I} |y_i|$$
   Ainsi, si les familles x et y sont sommables, il en est de même pour $(x+y)^+$, $(x+y)^-$: toutes les sommes ci-dessus sont finies. On utilise alors la relation de l'exercice 1.2.1 :
   $$\forall i \in I \qquad (x_i + y_i)^+ + x_i^- + y_i^- = (x_i + y_i)^- + x_i^+ + y_i^+.$$
   On a donc :
   $$\sum_{i\in I}(x_i + y_i)^+ + \sum_{i\in I} x_i^- + \sum_{i\in I} y_i^- = \sum_{i\in I}(x_i + y_i)^- + \sum_{i\in I} x_i^+ + \sum_{i\in I} y_i^+$$
   Toutes ces sommes étant finies, il vient
   $$\sum_{i\in I}(x_i+y_i) = \sum_{i\in I}(x_i+y_i)^+ - \sum_{i\in I}(x_i+y_i)^- = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^- + \sum_{i\in I} y_i^+ - \sum_{i\in I} y_i^- = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$
   Le cas de la multiplication par un scalaire se fait dans le même esprit et est laissé en exercice.

□

Théorème 1.2.11: Théorème de Fubini - Sommation par paquets

1. *Soit* $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ *une famille de réels. Alors*

$$\Big(\sum_{(i,k)\in I\times K}|x_{i,k}|<+\infty\Big)\implies\Big(\sum_{(i,k)\in I\times K}x_{i,k}=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}x_{i,k}=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}x_{i,k}\Big)$$

toutes les familles intervenant dans le membre de droite de cette implication étant sommables si le membre de gauche est satisfait.

2. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de réels. Supposons que* $I=\bigsqcup_{\ell\in L}I_\ell$*. Alors :*

$$\Big(\sum_{i\in I}|x_i|<+\infty\Big)\implies\Big(\sum_{i\in I}x_i=\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell}x_i\Big)$$

<u>*Démonstration.*</u> *Retour page 16*

1. *On procède comme pour la proposition 1.2.5 : on décompose* $x_{i,k}=x_{i,k}^+-x_{i,k}^-$*, on évite les soustractions. Grâce à la propriété de Fubini-Tonelli, on a*

$$\sum_{(i,k)\in I\times K}x_{i,k}^+=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}x_{i,k}^+=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}x_{i,k}^+\qquad\sum_{(i,k)\in I\times K}x_{i,k}^-=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}x_{i,k}^-=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}x_{i,k}^-$$

D'autre part, si $(x_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$ *est sommable, toutes les sommes ci-dessus sont finies (y compris les sommes intermédaires). Ainsi*

$$\begin{aligned}\sum_{(i,k)\in I\times K}x_{i,k}&=\sum_{(i,k)\in I\times K}x_{i,k}^+-\sum_{(i,k)\in I\times K}x_{i,k}^-\\&=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}x_{i,k}^+-\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}x_{i,k}^-=\sum_{i\in I}\Big(\sum_{k\in K}x_{i,k}^+-\sum_{k\in K}x_{i,k}^-\Big)=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}x_{i,k}.\end{aligned}$$

2. *Le résultat*

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell}x_i$$

est toujours vrai pour une famille positive. Pour le cas général, on procède comme pour la proposition 1.2.5 : on décompose $x_i=x_i^+-x_i^-$*. Si* $\sum_{i\in I}|x_i|<+\infty$*, grâce à la propriété de sommation par paquets dans le cas positif on a :*

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}x_i^+-\sum_{i\in I}x_i^-=\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell}x_i^+-\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell}x_i^-=\sum_{\ell\in L}\Big(\sum_{i\in I_\ell}x_i^+-\sum_{i\in I_\ell}x_i^-\Big)=\sum_{\ell\in L}\sum_{i\in I_\ell}x_i$$

□

Chapitre 2

Théorie de la mesure

Le concept d'intégrale étant intimement lié aux notions de longueur, d'aire, de volume, une approche de l'intégrale consiste tout d'abord à donner du sens à ces notions. Si on y regarde de près, ce sont un peu les mêmes notions, que l'on décline avec la dimension. Nous parlerons alors de **mesure** sur un ensemble X. Pour mesurer un sous-ensemble compliqué de X, l'idéal est de pouvoir le découper, lui et/ou son complémentaire, en parties plus simples que l'on sait mesurer, puis de faire la somme des mesures de ces parties. Cependant, il n'est pas dit que l'on puisse toujours le faire, et encore moins de façon finie.

Prenons le cas de $\mathbb{R}$. On a naturellement une notion de mesure d'un intervalle semi-ouvert du type : la longueur de $[a, b[$ est $b - a$. Si on juxtapose (dans n'importe quel ordre) un nombre fini d'intervalles $[a_i, b_i[$, $1 \leq i \leq n$ qui ne se chevauchent pas, la longueur de la réunion est la somme des longueurs $\ell = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$. Mais que se passe-t-il pour une union infinie de tels intervalles ? Si on veut procéder ainsi, on a besoin de faire des **sommes infinies** de longueurs, et des différences si on s'intéresse au complémentaire de tels ensembles.

On est naturellement amené à considérer des familles sommables (plutôt que des séries).

- si on dispose d'une famille d'intervalles semi-ouverts $[a_i; b_i[$ non triviaux ($a_i \neq b_i$) deux à deux disjoints, tous contenus dans un même grand intervalle, disons $[-N, N]$ avec $N \in \mathbb{N}$, la longueur totale de la réunion doit être finie, inférieure à $2N$, ce qui impose la dénombrabilité de la famille ;
- cependant la famille des intervalles deux à deux disjoints dont on veut sommer les longueurs peut ne pas être ordonnée. Naïvement, on pourrait se dire que dans $\mathbb{R}$ les intervalles pourraient être numérotés de la gauche vers la droite, ou de la droite vers la gauche ; mais ce n'est pas toujours possible : entre deux de des intervalles, il se peut qu'il y en ait une infinité d'autres. Par exemple pour calculer la longueur de
$$[0; 1[= \bigsqcup_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \left[\frac{n-1}{n} + \frac{p-1}{np(n+1)}; \frac{n-1}{n} + \frac{p}{n(n+1)(p+1)}\right[$$
$$\text{à savoir} \quad 1 = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{np(n+1)(p+1)}$$
il y a accumulation d'une infinité d'intervalle à gauche de chaque point $\frac{n-1}{n}$, $n \geq 2$. Et si on impose un ordre, la somme ne doit pas dépendre de cet ordre !

Je vous invite donc à revoir la notion de familles sommables. Remarquons qu'on peut remplacer des intervalles du types $[a;b[$ par tout autre type d'intervalle en remarquant par exemple que :

$$[0;1] = [0;2[\setminus]1;2[\quad]0;1] = [-1;1] \setminus [-1;0[$$

$$]0;1[= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}\Big[\qquad \mathbb{R}_+^* = \bigsqcup_{(p,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \Big[p, p+1\Big] \cdots$$

Remarque : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big) = 1$, donc $[0;1[$ et $]0;1[$ ont même longueur. Ouf !

Une question loin d'être évidente se pose maintenant : peut-on toujours découper un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, ou son complémentaire en une union **dénombrable** d'intervalles deux à deux disjoints ? (dénombrable est indispensable pour la sommabilité, comme on l'a vu). La réponse dépend de l'axiome du choix grâce auquel on peut construire un sous-ensemble de $[0;1]$ pour lequel la notion de longueur n'a pas de sens !

Petit aparté. À partir de la notion de longueur $\lambda([a;b[) := b-a$ d'un intervalle $[a;b[$ de $\mathbb{R}$, on veut donner un sens à la longueur de sous-ensembles (bornés) plus compliqués de $\mathbb{R}$. L'idée naïve est la suivante :

1. on se place tout d'abord dans les intervalles compacts $[-N;N]$ $N\in\mathbb{N}$ pour éviter des longueurs infinies
2. au lieu de mesurer la longueur de $A\subset[-N;N]$ on peut aussi mesurer la longueur de son complémentaire $\bar{A} = [-N;N]\setminus A$ qui peut être plus simple
3. on recouvre A ou $\bar{A}$ par une suite d'intervalles ne se chevauchant pas et on définit la longueur de ce sous-ensemble comme la somme (infinie) des longueurs des intervalles qui les recouvrent.

De même, on peut aussi généraliser, dans $\mathbb{R}^d$, la notion de volume d-dimensionnel à partir du volume d'un pavé de $\mathbb{R}^d$:

$$\lambda_d\Big([a_1;b_1[\times\ldots][a_d;b_d[\Big) := \prod_{k=1}^{d}\lambda([a_k;b_k[) = (b_1-a_1)\cdots(b_d-a_b).$$

Si on note $\mathscr{E}_1$ l'ensemble de tous les intervalles $[a;b[$ (bornés) de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{E}_2$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$ obtenues en appliquant cette idée naïve, c'est à dire en faisant une succession au plus dénombrable d'opérations union et passage au complémentaire d'éléments de $\mathscr{E}_1$, on peut définir la longueur de toutes les parties dans $\mathscr{E}_2$, notamment tous les ouverts et tous les fermés de $\mathbb{R}$, qui sont bien dans $\mathscr{E}_2$, et bien d'autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$, mais hélas, on est loin d'atteindre tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$! En effet, le cardinal de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$ est :

$$\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathbb{R}) = 2^{\operatorname{card}\mathbb{R}} = 2^{(2^{\operatorname{card}\mathbb{N}})} > \operatorname{card}\mathbb{R} > \operatorname{card}\mathbb{N}.$$

Or l'ensemble $\mathscr{E}_1$ de tous les intervalles bornées de $\mathbb{R}$ a le même que cardinal que celui de $\mathbb{R}$: pour définir un intervalle fermé, par exemple, il suffit de se donner deux réels donc un élément de $\mathbb{R}^2$ qui a le même cardinal que celui de $\mathbb{R}$, et si on considère les intervalles fermés, ouvert, semi-fermés à gauche ou à droite, on ne fait que multiplier par 4 le cardinal de l'ensemble des intervalles fermés, ce qui ne le change pas ($4\times\operatorname{card}\mathbb{R}^2 = \operatorname{card}\mathbb{R}$). De même, l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des unions dénombrables d'éléments de $\mathscr{E}_1$ ou de leur complémentaire est encore de cardinal $\operatorname{card}\mathbb{R}$ (c'est dû au fait que $\operatorname{card}\mathbb{R} > \operatorname{card}\mathbb{N}$).

Comme $\mathscr{E}_2$ n'est pas saturé par succession dénombrable d'union et de passage au complémentaire (une union dénombrable d'éléments de $\mathscr{E}_2$ ou de leur complémentaire n'est pas nécessairement dans $\mathscr{E}_2$), on doit pouvoir faire mieux. Comment ? On peut réitérer le processus définissant $\mathscr{E}_2$ en prenant des unions dénombrables d'éléments de $\mathscr{E}_2$ ou de leur complémentaire pour construire un ensemble $\mathscr{E}_3$ et continuer ainsi de suite. Cette idée se trouve déjà dans les travaux d'Émile Borel (1898). Le procédé de récurrence transfinie (en relation avec l'axiome du choix *) permet de montrer que l'on obtient ce qu'on appelle maintenant l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Cet ensemble est saturé par passage au complémentaire et unions dénombrables (et donc

*. L'axiome du choix consiste à admettre que dans une famille quelconque d'ensembles non vides, on peut choisir simultanément un élément dans chacun de ces ensembles : si $\mathscr{A} = \{A_i : i\in I\}$ est une famille d'ensembles non vides, il existe une application « choix » $c : \mathscr{A}\to\bigcup_{i\in I}A_i$ telle que pour chaque $i\in I$, $c(A_i)\in A_i$.

aussi par intersections dénombrables) – ce qu'on appelle une tribu. Les boréliens de $\mathbb{R}$ admettent une longueur bien définie.

Il est alors naturel poser à nouveau la question : est-ce que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est obtenu de cette manière ? Eh bien non ! d'après l'axiome du choix, on n'a toujours pas dépassé le cardinal de $\mathbb{R}$.

$$\operatorname{card} \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \operatorname{card} \mathbb{R}.$$

On peut alors compléter les boréliens en rajoutant les ensembles négligeables c'est à dire ceux qui sont contenus dans un ensemble de longueur 0, sans pour autant être un borélien. Toute partie de $\mathbb{R}$ qui est la réunion d'un borélien et d'un négligeable a alors la longueur bien définie de ce borélien et en plus, ces parties ont le bon goût de former également un sous-ensemble $\widehat{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ qui est saturé par passage au complémentaire et unions dénombrables – une tribu, la tribu de Lebesgue. On ne peut pas faire mieux !

Alors on repose la question : est-ce que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est obtenu de cette manière ? Cette fois, la réponse n'est pas simple ! Au niveau du cardinal, on est content : on a fait un bond ! Car on peut montrer que

$$\operatorname{card} \widehat{\mathscr{B}}(\mathbb{R}) = \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{R}) = 2^{\operatorname{card} \mathbb{R}}.$$

Mais ce n'est pas suffisant : en vertu de l'axiome du choix, on peut répondre par la négative ! On peut en effet construire, au moyen de l'axiome du choix, des ensembles non mesurables. Et que dire si on n'admet pas l'axiome du choix ? Ce n'est pas décidable ! Frustrant non ?

Quelques remarques rassurantes tout de même :

— On peut montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut se découper en une union au plus dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints. Cela vient du fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est dit **séparable** : il contient un sous ensemble dénombrable dense). On va donc pouvoir mesurer tout ouvert, et donc tout fermé de $\mathbb{R}$ en passant au complémentaire.

— Bien qu'assez compliqué, un *ensemble de Cantor* dans $\mathbb{R}$ est mesurable : il est fermé, et son complémentaire est une union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

— $\mathbb{Q} \cap [0;1]$ et $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0;1]$ sont mesurables : $\mathbb{Q}$ est union dénombrable d'intervalles réduits à un point ! Il sera même de longueur nulle !

2.1 Tribu, espace mesurable, mesure.

On se place dans un ensemble X qui peut être $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$, ou tout autre ensemble... Notons $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ un ensemble de sous-ensembles de X dont on pense pouvoir définir la mesure. Les premières conditions que l'on a alors envie de mettre sur $\mathscr{A}$ sont celle d'une *algèbre de parties* :

Définition 2.1.1: Algèbre de parties (ou encore algèbre de Boole, ou clan).

Un sous ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une ***algèbre de parties*** *(sur X) si :*
- $X \in \mathscr{A}$
- $(A \in \mathscr{A}) \implies (A^c \in \mathscr{A})$ *(stabilité par passage au complémentaire)*
- $(A, B \in \mathscr{A}) \implies (A \cup B \in \mathscr{A})$ *(stabilité par union finie).*

Remarques 2.1.2: (À vérifier en exercice)

1. Dans la définition, on peut remplacer la stabilité par union finie en stabilité par intersection finie. Une algèbre de parties contient $\varnothing$ et est stable par toute combinaison finie d'opérations ensemblistes (union, intersection, différence, différence symétrique, passage au complémentaire).

2. Si X est fini et si : $\forall x \in X$, $\{x\} \in \mathscr{A}$, alors $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$.
3. Si X est infini, le sous-ensemble $\{A \subset X : A \text{ ou } A^c \text{ est fini}\}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une algèbre sur X.
4. L'ensemble des unions finies d'intervalles généralisés de $\mathbb{R}$ est une algèbre de parties.

Proposition 2.1.3: Intersection d'algèbres

Toute intersection d'algèbres de parties sur un ensemble X est une algèbre de parties sur X.

Voir la démonstration (page 48)

Comme on l'a vu en introduction, il est naturel de s'intéresser au cas dénombrable.

Définition 2.1.4: Tribu (ou σ-algèbre) et espace mesurable.

*Soit X un ensemble et $\mathscr{M}$ une algèbre de parties de X. Si $\mathscr{M}$ est stable par union dénombrable, on dit que $\mathscr{M}$ est une **tribu (ou σ-algèbre)** :*

$$\Big((A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite de parties de } \mathscr{M}\Big) \implies \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{M}\Big)$$

*Le couple $(X, \mathscr{M})$ est appelé **espace mesurable**, les sous-ensembles $A \in \mathscr{M}$ sont qualifiés de **$\mathscr{M}$-mesurables** (ou simplement **mesurables**).*

* * * * * * * * * *

Il est parfois judicieux de remplacer la propriété de stabilité par union dénombrable par la propriété plus générale (mais équivalente) : pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de parties de $\mathscr{M}$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{M}$.

Exemples 2.1.5: (À vérifier en exercice)

— Bien sûr, $\mathscr{P}(X)$ et $\{\emptyset, X\}$ sont des tribus sur X (tribus triviale et grossière respectivement).
— Si X est non dénombrable, le sous-ensemble $\{A \subset X : A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une tribu sur X.
— Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de X alors $\left\{\bigcup_{k\in K} A_k, K \subset \mathbb{N}\right\}$ est une tribu sur X.

Exercices 2.1.6

1. Montrer qu'une σ-algèbre est stable par intersection dénombrable.
2. À partir d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$, construire une suite croissante de sous ensembles $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réunion X, puis une suite de sous-ensembles deux à deux disjoints $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réunion X. Vérifier que si les sous-ensembles A_n sont mesurables, il en est de même des sous-ensembles B_n et sous-ensembles C_n.
3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. On définit :

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \quad \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

(inf et sup sont des bornes inférieure et supérieure pour la relation d'ordre $\subset$).

(a) Vérifier que $\inf_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est le plus gros sous-ensemble de X contenu dans tous les A_n.

(b) Vérifier que $\sup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est le plus petit sous-ensemble de X contenant tous les A_n.

(c) Caractériser les éléments de ces quatre sous-ensembles au moyen de quantificateurs et vérifier que si tous les A_n sont mesurables pour la tribu $\mathscr{M}$ il en est de même de ces quatre sous-ensembles.

Proposition 2.1.7: intersection de tribus

Toute intersection de σ-algèbres sur un ensemble X est une σ-algèbre sur X.

Voir la démonstration (page 48)

Définition 2.1.8: Mesure - Espace mesuré.

Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable.

1. *Une **mesure** μ sur $(X, \mathscr{M})$ est une application $\mu : \mathscr{M} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*
   - $\mu(\emptyset) = 0$
   - *μ est σ-additive : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties deux à deux disjointes de $\mathscr{M}$,*

$$\mu\Big(\bigsqcup_{n\in N} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

2. *μ est une mesure **finie** si $\mu(X) < +\infty$.*
   *μ est une **probabilité** si $\mu(X) = 1$.*
   *μ est **σ-finie** si $\mu(X) = +\infty$ et s'il existe une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu(X_n) < +\infty \quad \text{et} \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

3. *Le triplet $(X, \mathscr{M}, \mu)$ est un **espace mesuré**.*

* * * * * * * * * *

On peut remplacer la propriété de σ-additivité par la propriété plus générale (mais équivalente) : pour toute famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{M}$, $\mu\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$.

Exemples 2.1.9: (À vérifier en exercice)

1. *Mesure nulle :* $(X, \mathscr{M}, \mu)$, $\forall A \in \mathscr{M}$, $\mu(A) = 0$,
2. *Mesure grossière :* $(X, \{X, \emptyset\}, \mu)$, $X \neq \emptyset$, $\mu(X) = 1$, $\mu(\emptyset) = 0$ (c'est une probabilité).
3. *Mesure de décompte :* $(X, \mathscr{P}(X), \mu)$ avec $\begin{cases} \mu(A) = \operatorname{card} A & \text{si } A \text{ est fini} \\ \mu(A) = +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$ (c'est une mesure finie si et seulement si X est fini, σ-finie si et seulement si X est dénombrable).

4. *Mesure de Dirac :* $(X, \mathscr{P}(X), \delta_a)$ avec $a \in X$, $\begin{cases} \delta_a(A) = 1 & \text{si } a \in A \\ \delta_a(A) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ (probabilité).
5. Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de X et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs ou nuls. On définit une mesure m (dite discrète) sur $\mathscr{P}(X)$: $m(A) = \sum_{i\in I} \alpha_i \delta_{a_i}(A)$. Elle est finie si $\sum_{i\in I} \alpha_i < +\infty$, elle est σ-finie sinon.

Proposition 2.1.10: Propriétés d'additivité et de croissance des mesures

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.

1. *Soient $A, B \in \mathscr{M}$. Si $A \subset B$ alors $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ et donc $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *$\forall A, B \in \mathscr{M} \qquad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

Démonstration. *En exercice.* □

Proposition 2.1.11: Comportement séquentiel des mesures

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.

1. ***Sous additivité :*** *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille au plus dénombrable de $\mathscr{M}$,*
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ (sous additivité).}$$
2. ***Continuité par limite croissante*** *: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathscr{M}$ alors*
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
3. ***Continuité par limite décroissante*** *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante dans $\mathscr{M}$ et si il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ alors*
$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\downarrow} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

* * * * * * * * * *

On peut remplacer la propriété de sous-additivité par la propriété plus générale (mais équivalente) : pour toute famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{M}$, $\mu\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \leq \sum_{i\in I} \mu(A_i)$.

Voir la démonstration (page 49)

Remarque 2.1.12

On considère $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de décompte (card) (cf. exemples 2.1.9) et on pose

$A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$. Alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing \quad \text{donc} \quad \operatorname{card}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \operatorname{card}(\varnothing) = 0.$$

Cependant $\forall n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{card} A_n = +\infty$ donc $\lim_{n\to\infty}^{\downarrow} \operatorname{card}(A_n) = +\infty \neq 0$. L'hypothèse de finitude est donc importante pour la propriété de continuité par limite décroissante.

Exercices 2.1.13

1. Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathscr{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :
   (a) $\mu(\varnothing) = 0$;
   (b) μ est additive : pour tous $A, B \in \mathscr{M}$, $A \cap B = \varnothing$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
   (c) μ est continue par limite croissante.

   Montrer que μ est une mesure.
2. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur $(X, \mathscr{M})$ et α_1 et α_2 deux réels positifs. Montrer que l'application $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 : \mathscr{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $A \mapsto \alpha_1\mu_1(A) + \alpha_2\mu_2(A)$ est une mesure.
3. Soient $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de mesures sur $(X, \mathscr{M})$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On suppose I dénombrable. Montrer que

$$\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \mu_i : \mathscr{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \qquad A \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i \mu_i(A)$$

   est une mesure. À quelle condition est-elle finie ?

2.2 Tribu engendrée - Exemple des boréliens.

Dans un cadre général, il est très difficile, souvent impossible, de décrire complètement une tribu. Dans la plupart des cas, une tribu est définie à partir d'une famille de sous ensembles qui l'engendrent.

Définition 2.2.1: Tribu engendrée.

Soit X un ensemble et $\mathscr{C}$ une famille de parties de X. On appelle tribu engendrée par $\mathscr{C}$ *la plus petite tribu contenant $\mathscr{C}$. On la note $\sigma(\mathscr{C})$.*

Remarque 2.2.2

Une telle tribu existe et est unique : c'est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathscr{C}$. Cette intersection n'est pas vide puisque $\mathscr{P}(X)$ est une tribu contenant $\mathscr{C}$. Elle est caractérisée par :

Si $\mathscr{M}$ est une tribu alors : $(\mathscr{A} \subset \mathscr{M}) \implies (\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M})$.
Et par conséquent : $(\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)) \implies (\sigma(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{B}))$.

Définition 2.2.3: Tribu borélienne.

Soit X un espace topologique. La tribu engendrée par les ouverts de X est appelée tribu borélienne *de X et notée $\mathscr{B}(X)$. Ses éléments sont appelés* boréliens *de X.*

* * * * * * * * * *

La tribu borélienne est aussi engendrée par les fermés (stabilité par passage au complémentaire).

Remarque 2.2.4

Un espace métrique est **séparable** s'il possède un sous-ensemble dénombrable dense (e.g. $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{Q}^d$ dans $\mathbb{R}^d$). Dans un tel espace, les boules ouvertes engendrent la tribu borélienne : tout ouvert est union *dénombrable* de boules ouvertes.

Proposition 2.2.5: Boréliens de $\mathbb{R}$, de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$.

1. *$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ (ou les fermés de $\mathbb{R}$), mais aussi par :*
   - *les intervalles $]a, b[$, $a \leq b$*
   - *les intervalles $]a, +\infty[$*
   - *les intervalles $[a, +\infty[$*
   - *les intervalles $[a, b]$, $a \leq b$*
   - *les intervalles $]-\infty, b[$*
   - *les intervalles $]-\infty, b]$*
   - *les intervalles $[a, b[$, $a \leq b$*
   - *les intervalles $]a, b]$, $a \leq b$*
   - *...*
2. *$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est engendrée par les intervalles de la forme $]a, +\infty]$, $[a, +\infty]$, $[-\infty, b[$ ou $[-\infty, b]$.*

Démonstration. *On sait que $\mathbb{R}$ est un espace métrique, et même un espace vectoriel normé, pour la distance de la valeur absolue ($d(a, b) = |b - a|$) et séparable ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Notons $\mathcal{I}_o = \{]a; b[, -\infty < a \leq b < +\infty\}$ l'ensemble des intervalles ouverts, c'est à dire l'ensemble des boules ouvertes. Évidemment $\mathcal{I}_o \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(\mathcal{I}_o) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Réciproquement, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts (cf. remarque 2.2.6) donc est contenu dans $\sigma(\mathcal{I}_o)$. Ce qui implique que la tribu de boréliens, engendrée par tous les ouverts est contenue dans $\sigma(\mathcal{I}_o)$. D'où l'égalité $\sigma(\mathcal{I}_o) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.*
Tout intervalle fermé est union dénombrable d'intervalles ouverts et tout intervalle ouvert est intersection dénombrable d'intervalle fermé. Ainsi si $\mathcal{I}_f = \{[a; b], -\infty < a \leq b < +\infty\}$, alors $\mathcal{I}_f \subset \sigma(\mathcal{I}_o)$ et $\mathcal{I}_o \subset \sigma(\mathcal{I}_f)$ d'où $\sigma(\mathcal{I}_f) = \sigma(\mathcal{I}_o) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Le même type de raisonnement s'applique aux intervalles semi-ouverts ou ayant une borne infinie. De même, $\overline{\mathbb{R}}$ est métrique (par exemple pour la distance $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ avec $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$) et séparable. Le même raisonnement s'applique. □

Remarque 2.2.6

On peut même se restreindre au cas des intervalles $[a; b[$ où $a, b \in \mathbb{Q}$: cela montre que $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par une famille dénombrable d'intervalles ($\operatorname{card}\{(a, b) \in \mathbb{Q}^2 : a \leq b\} = \operatorname{card} \mathbb{N}$).

Proposition 2.2.7: Boréliens de $\mathbb{R}^d$.

$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$ (ou les fermés de $\mathbb{R}^d$), mais aussi par :

– *les boules ouvertes*
– *les pavés ouverts :* $\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$
– *les bandes ouvertes :* $\mathbb{R}^{i-1} \times]a, b[\times \mathbb{R}^{d-i}$
– *les demi-esp. ouverts :* $\mathbb{R}^{i-1} \times]a, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-i}$
– *les boules fermées*
– *les pavés fermés :* $\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$
– *les bandes fermées :* $\mathbb{R}^{i-1} \times [a, b] \times \mathbb{R}^{d-i}$
– *les demi-esp. fermés :* $\mathbb{R}^{i-1} \times [a, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-i}$

Démonstration. *Laissée en exercice (cf. proposition 2.2.5).* □

2.3 Théorèmes d'unicité et de prolongement de mesures.

2.3.1 Unicité de mesures.

Pour montrer qu'une famille de parties est une tribu, ou qu'une propriété est satisfaite par les éléments d'une tribu, on a souvent recours à une décomposition de la notion de tribu en deux sous notions :

Définition 2.3.1: π-système, λ-système.

Soit X un ensemble.

1. *On dit que $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ est un* ***π-système*** *si $\mathscr{S}$ est stable par intersections finies.*
2. *On dit que $\mathscr{S}$ est un* ***λ-système*** *si :*
   - $X \in \mathscr{S}$
   - *$\mathscr{S}$ est stable par « différence propre » :* $(A_1, A_2 \in \mathscr{S},\ A_1 \subset A_2) \implies (A_2 \setminus A_1 \in \mathscr{S})$
   - *$\mathscr{S}$ est stable par union croissante dénombrable :*

$$\Big((A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite croissante de } \mathscr{S} \Big) \implies \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{S} \Big).$$

Exemples 2.3.2: (À vérifier en exercice)

1. π-systèmes :
   - L'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ est un π-système.
   - De même, les intervalles de la forme $]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$ forment un π-système sur $\mathbb{R}$.
   - Ou encore les intervalles de la forme $[a, b[$, $-\infty < a \leq b < +\infty$.
   - Dans un espace topologique, l'ensemble des ouverts est un π-système.
   - Les sous-ensembles convexes d'un espace affine forment un π-système ($\varnothing$ est convexe).
2. λ-système :
   - Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures finies sur $(X, \mathscr{M})$ telles que $\mu_1(X) = \mu_2(X)$ alors l'ensemble $\mathcal{L} = \{A \in \mathscr{M} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ est un λ-système.

Lemme 2.3.3: Lemme π-λ de Dynkin (démontré par Sierpinski).

1. *Une intersection quelconque de λ-systèmes est un λ-système. Il existe donc un plus petit λ-système contenant $\mathscr{C}$ noté $\lambda(\mathscr{C})$: c'est l'intersection de tous les λ-systèmes contenant $\mathscr{C}$.*

2. *Un ensemble de parties $\mathscr{C}$ de X est une tribu si et seulement si c'est à la fois un π-système et un λ-système.*
3. ***Lemme π-λ de Dynkin** : le plus petit λ-système contenant un π-système $\mathscr{C}$ est la tribu $\sigma(\mathscr{C})$. Autrement dit, si $\mathscr{C}$ est un π-système, alors $\lambda(\mathscr{C})$ aussi et donc $\sigma(\mathscr{C}) = \lambda(\mathscr{C})$.*

Voir la démonstration (page 51)

Théorème 2.3.4: Théorème d'unicité de mesure

Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathscr{M})$ et $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}$ un π-système qui engendre $\mathscr{M}$ tels que :

$$\forall A \in \mathscr{C},\ \mu(A) = \nu(A) < +\infty.$$

1. *Si $X \in \mathscr{C}$, alors $\mu = \nu$ et ce sont des mesures finies.*
2. *Si X est union d'une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}$, alors $\mu = \nu$ et sont des mesures σ-finies.*

* * * * * * * * * *

Ce théorème qui porte souvent le nom de théorème de Caratheodory-Hahn, ou de Hahn, a été démontré par Fréchet.

Voir la démonstration (page 53)

2.3.2 Prolongement de mesures.

Généralement, pour obtenir une mesure, on commence par la définir sur une famille $\mathscr{C}$ de sous-ensembles particuliers, puis on la prolonge tout d'abord à l'algèbre $\mathscr{A}$ engendrée par cette famille de sous-ensembles (intersection de toutes les algèbres de parties contenant $\mathscr{C}$), puis à la tribu $\sigma(\mathscr{C})$ engendrée par $\mathscr{C}$, voire même à une tribu plus grosse. Pour cela, on introduit une notion plus faible de mesure (une pré-mesure) définie seulement sur une algèbre de parties, et non une tribu.

Définition 2.3.5: Pré-mesure sur une algèbre de parties.

*Soient $\mathscr{A}$ une **algèbre de parties** sur X. Une* pré-mesure *sur $\mathscr{A}$ est une application $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfaisant :*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *μ est σ-additive sur $\mathscr{A}$: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties de $\mathscr{A}$ disjointes deux à deux dont la réunion $\displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dans $\mathscr{A}$ (*) alors $\displaystyle\mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.*

* * * * * * * * * *

***Attention** : contrairement au cas d'une tribu, $(*)$ n'est pas toujours vraie dans une algèbre de partie. C'est ce qui fait la différence entre mesure et pré-mesure.*

Remarques 2.3.6

1. On peut parler de pré-mesure finie ou σ-finie comme dans le cas des mesures.
2. Les propriétés d'additivité et de croissance de la proposition 2.1.10 restent valables pour une

pré-mesure.

L'intérêt de la notion de pré-mesure sur une algèbre de parties est précisément de vouloir la prolonger en une mesure sur la tribu engendrée par cette algèbre de parties. C'est ce que dit le théorème de Caratheodory ci-dessous. Au préalable, on introduit la notion de mesure extérieure associée à une pré-mesure qui va permettre de définir un prolongement de cette pré-mesure.

Définition 2.3.7: Mesure extérieure associée à une pré-mesure

Soient $\mathscr{A}$ une **algèbre de parties** *sur X et $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une pré-mesure sur $\mathscr{A}$. La* mesure extérieure associée à μ *est l'application μ^* dédinie sur $\mathscr{P}(X)$ par :*

$$\forall E \in \mathscr{P}(X), \quad \mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \;:\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite de } \mathscr{A},\ E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big\}.$$

Un ensemble $A \in \mathscr{P}(X)$ est dit μ^*-mesurable si : $\forall E \in \mathscr{P}(X)$, $\mu^*(E) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$.

* * * * * * * * * *

Attention : une mesure extérieure n'est pas une mesure sur $\mathscr{P}(X)$.
On peut remplacer la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une famille dénombrable, c'est équivalent. Il existe une définition plus générale (axiomatique), de mesure extérieure.

Lemme 2.3.8: Sous-additivité de la mesure extérieure

La mesure extérieure μ^* associée à une pré-mesure μ est croissante et sous additive :

1. *Si $E \subset F$ alors $\mu^*(E) \le \mu^*(F)$;*
2. *Pour toute suite de parties $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a $\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(E_k)$.*

* * * * * * * * * *

On peut remplacer la suite $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par une famille dénombrable, c'est équivalent.

Voir la démonstration (page 54)

La démonstration pourra être admise en première lecture si on admet le théorème suivant.

Théorème 2.3.9: Théorème de prolongement de Caratheodory.

Soit $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une pré-mesure sur une algèbre de parties $\mathscr{A}$ de X, et μ^* la mesure extérieure associée à μ. Alors :

1. *La restriction de μ^* à $\mathscr{A}$ coïncide avec μ ;*
2. *L'ensemble $\mathscr{M}$ des sous-ensembles μ^*-mesurables est une tribu contenant $\mathscr{A}$ (en particulier $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}$) ;*
3. *La restriction de μ^* à $\mathscr{M}$ est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ (de même en remplaçant $\mathscr{M}$ par $\sigma(\mathscr{A})$).*

Voir la démonstration (page 55)

Elle pourra être admise en première lecture. Elle est assez technique et mise à titre d'information.

Remarques 2.3.10

1. A travers ce théorème, on voit bien que lors de la construction d'une mesure vérifiant certaines propriétés sur une algèbre de parties $\mathscr{A}$, on ne peut généralement pas la prolonger à tout $\mathscr{P}(X)$ mais on peut la prolonger à la tribu $\sigma(\mathscr{A})$. La notion de tribu est introduite pour ça.
2. Il n'y a pas unicité en général du prolongement d'une pré-mesure en une mesure. Cependant en vertu du théorème 2.3.4, l'unicité est acquise si μ est finie et dans ce cas aussi μ^* est finie, ou si μ est σ-finie auquel cas μ^* est σ-finie.

2.3.3 La mesure de Lebesgue.

Corollaire 2.3.11: Existence de la mesure de Lebesgue

1. *Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, appelée* ***mesure le Lebesgue*** *vérifiant :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b, \quad \lambda(]a, b]) = b - a.$$

2. *Plus généralement, il existe une unique mesure λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, vérifiant :*
si $a = (a_1, \ldots, a_d)$ et $b = (b_1, \ldots, b_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ satisfont $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$ $a_i \leq b_i$ alors

$$\lambda_d\Big(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i]\Big) = \prod_{i=1}^{d} \lambda(]a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

(si $d = 1$, $\lambda_1 = \lambda$). On l'appelle également mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Voir la démonstration (page 58)

Remarques 2.3.12

1. $\lambda(\{a\}) = 0$, $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$, $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b[) = \lambda(]a, b]) = b - a$.
   Par σ-additivité, **si $A \subset \mathbb{R}$ est dénombrable, alors $\lambda(A) = 0$.**
   En particulier $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle, bien que dense dans $\mathbb{R}$! En utilisant l'axiome du choix, on peut construire un sous-ensemble non mesurable sur $\mathbb{R}$ (ou sur $[0, 1]$) (cf. un peu plus loin en aparté).
2. On peut généraliser la construction de la mesure de Lebesgue pour construire d'autres mesures sur $\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$ dites mesures de Stieltjes (très importantes en théorie de probabilités) : on considère une fonction croissante F (dit fonction de répartition), continue à droite, et on pose :
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\ a \leq b \quad \mu(]a; b]) = F(b) - F(a).$$

Proposition 2.3.13: Invariance par translation

1. *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est invariante par translation :*

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad \lambda(A + t) = \lambda(A) \qquad (\text{où } A + t = \{a + t : a \in A\})$$

2. *Si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation, alors il existe $k > 0$ tels que $\mu = k \cdot \lambda$.*

Démonstration.

1. *On remarque tout d'abord que l'ensemble des intervalles est invariant par translation, donc la σ-algèbre engendrée par les intervalles également. Le translaté d'un borélien est donc un borélien. Fixons $t \in \mathbb{R}$ et considérons $\lambda_t : A \mapsto \lambda_t(A) = \lambda(A+t)$ sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Cette application est une mesure (exercice) qui coïncide avec la mesure de Lebesgue sur le π-système des intervalles de la forme $]a;b]$. On en déduit que $\lambda_t = \lambda$.*
2. *On Pose $k = \mu(]0;1])$. Si $k = 0$, alors μ est identiquement nulle. Sinon, on pose $\nu = \frac{1}{k}\mu$: c'est une mesure sur $\mathbb{R}$, invariante par translation, qui coïncide avec λ sur les intervalles de la forme $]a;b]$, donc $\nu = \lambda$.*

□

Définition 2.3.14: Négligeable - Presque partout

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.
*Un sous ensemble N de X est **négligeable** s'il est contenu dans un ensemble mesurable de mesure nulle (X peut ne pas être dans $\mathscr{M}$).*
*Une fonction (ou une propriété) définie sur $D \subset X$ est **définie μ-presque partout** (μ-p.p.) sur X si D^c est négligeable.*
Deux fonctions f et g sont égales μ-presque partout si $\{X : f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable.
*Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies μ-pp sur X (i.e. définies sur des ensembles D_n de complémentaires négligeables) converge **μ-presque sûrement** (μ-ps) si le complémentaire de :*

$$\left\{x \in \bigcap_n D_n \subset X : \lim_n f_n(x) \text{ existe}\right\}$$

est négligeable.

Exercice 2.3.15

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Une union dénombrable d'ensembles négligeables de $(X, \mathscr{M}, \mu)$ est négligeable.
2. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties négligeables de $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Alors

$$\widehat{\mathscr{M}} = \{A \cup N \ : \ A \in \mathscr{M}, N \in \mathscr{N}\}$$

est une tribu et on peut prolonger μ en une mesure $\widehat{\mu}$ sur $\widehat{\mathscr{M}}$ en posant $\widehat{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$. On l'appelle **tribu complétée**. C'est la plus grosse tribu sur laquelle μ peut être prolongée.

Remarque 2.3.16

Dans le théorème de prolongement de Caratheodory, la tribu $\mathscr{M}$ des sous-ensembles μ^*-mesurables est en fait complète pour la mesure μ^* : tout sous-ensemble négligeable est mesurable. En particulier, la tribu complétée sur laquelle on définit la mesure de Lebesgue, qui contient les boréliens, s'appelle **la tribu de Lebesgue**.

Dans la suite, les fonctions qui sont définies presque partout à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont considérées comme définies partout, quitte à les compléter par la valeur 0 (ou toute autre valeur arbitraire) là où elles ne sont pas définies.

Petit aparté : construction d'un ensemble non mesurable pour la tribu de Lebesgue. Voici un exemple d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue (construit à partir de l'axiome du choix) et donc n'appartenant pas à la tribu complétée de Lebesgue. Sur $[0;1[$ on considère la relation d'équivalence modulo $\mathbb{Q}$: x est relié à y si $y-x\in\mathbb{Q}$. Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence (on note généralement $\mathscr{C}=[0;1[/\mathbb{Q})$; c'est un sous-ensemble de $\mathscr{P}([0;1[)$ qui forme une partition de $[0;1[$:

$$\text{aucune partie dans } \mathscr{C} \text{ n'est vide et } [0;1[= \bigsqcup_{C\in\mathscr{C}} C.$$

En vertu de l'axiome du choix, il existe une application $\varphi:\mathscr{C}\to[0;1[$ telle que pour tout $C\in\mathscr{C}$, $\varphi(C)\in C$: cette application consiste à « choisir » un représentant $\varphi(C)$ dans chaque classe d'équivalence C. Notons $A_0=\{\varphi(C):C\in\mathscr{C}\}$ l'ensemble de ces représentants.

Je prétends que A_0 ne peut pas être mesurable.

Pour tout rationnel $q\in[0;1[\cap\mathbb{Q}$ définissons l'application bijective t_q de « translation de q modulo 1 » par

$$t_q:[0;1[\to[0;1[\qquad x\mapsto\begin{cases} x+q & \text{si } q+x<1\\ x+q-1 & \text{si } x+q\geq 1\end{cases}$$

et notons $A_q=t_q(A_0)=\Big((A_0+q)\cap[0;1[\Big)\sqcup\Big((A_0+q-1)\cap[0;1[\Big)=\Big((A_0+q)\cap[0;1[\Big)\sqcup\bigg(\Big((A_0+q)\cap[1;2[\Big)-1\bigg)$.

Si A_0 est mesurable, alors A_q aussi et comme λ est invariante par translation :

$$\begin{aligned}\lambda(A_q)&=\lambda\Big((A_0+q)\cap[0;1[\Big)+\lambda\Big((A_0+q-1)\cap[0;1[\Big)\\ &=\lambda\Big((A_0+q)\cap[0;1[\Big)+\lambda\Big((A_0+q)\cap[1;2[\Big)\\ &=\lambda(A_0+q)=\lambda(A_0)\end{aligned}$$

D'autre part la famille $(A_q)_{q\in\mathbb{Q}\cap[0;1[}$ forme aussi une partition de $[0;1[$:

— si $x\in A_q\cap A_{q'}$ alors il existe $a,a'\in A_0$ tels que $t_q(a)=t_{q'}(a')$ c'est à dire $a-a'\in\mathbb{Q}$ d'où $a=a'$ par définition de A_0, donc $q=q'$: les A_q, $q\in\mathbb{Q}\cap[0;1[$ sont deux à deux disjoints ;

— pour tout $x\in[0;1[$ il existe un $a\in A_0$ tel que $x\in C_a$, auquel cas il existe $q\in\mathbb{Q}\cap]-1;1[$ tel que $x=a+q$, auquel cas $x=t_q(a)\in A_q$ si $q\geq 0$ et $x=t_{q+1}(a)\in A_{q+1}$ si $q<0$ donc les A_q, $q\in\mathbb{Q}\cap[0;1[$ recouvrent $[0;1[$.

Comme $\mathbb{Q}\cap[0;1[$ est dénombrable et que tous les $\lambda(A_q)$ sont égaux à $\lambda(A_0)$, il vient

$$\lambda([0;1[)=1=\lambda\left(\bigsqcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0;1[}A_q\right)=\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0;1[}\lambda(A_q)=\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0;1[}\lambda(A_0)=(+\infty)\times\lambda(A_0).$$

Si $\lambda(A_0)=0$ on a $0=1$, et si $\lambda(A_0)>0$, on a $1=+\infty$! Contradiction. Donc A_0 n'est pas mesurable (pour la tribu de Lebesgue, c'est à dire la tribu complétée $\widehat{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ de la tribu de boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{R})$).

2.4 Fonctions mesurables.

Nota Bene : notation

Soit Y un ensemble, et $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(Y)$ un sous-ensemble de parties de Y et $f:X\to Y$ une application. On note "presque abusivement"

$$f^{-1}(\mathscr{C}):=\{f^{-1}(C):C\in\mathscr{C}\}\subset\mathscr{P}(X).$$

En d'autres terme la "l'image réciproque d'une famille de parties" est "la famille de parties des images réciproques".

* * * * * * * * * *

Attention : si f est bijective, il y a ici un triple niveau d'écriture (avec abus de notation)

les éléments $f^{-1}(y) \in X$, les éléments de $f^{-1}(C) \in \mathscr{P}(X)$, la famille $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{P}(X)$.

Lemme 2.4.1: Tribus image et image réciproque - Lemme de transport

Soit $f : X \to Y$ une application.

1. ***Tribu image réciproque.*** *Si $\mathcal{Y}$ est une tribu de Y alors $f^{-1}(\mathcal{Y}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{Y}\}$ est une tribu sur X.*
2. ***Tribu image.*** *Soit $\mathcal{X}$ une tribu sur X. Alors $\{B \in \mathscr{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{X}\}$ est une tribu sur Y.*
3. ***Lemme de transport.*** *Soit $\mathscr{C}$ une famille de parties de Y. Alors $\sigma\big(f^{-1}(\mathscr{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathscr{C})\big)$.*

Voir la démonstration (page 61)

Définition 2.4.2: Application mesurable

Soient $(X, \mathcal{X})$ et $(Y, \mathcal{Y})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ est mesurable si l'image réciproque d'un sous-ensemble mesurable est mesurable :

$$\forall B \in \mathcal{Y} \qquad f^{-1}(B) \in \mathcal{X} \qquad (\textit{i.e. } f^{-1}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X})$$

Proposition 2.4.3: Composition

Soit $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ et $g : (Y, \mathcal{Y}) \to (Z, \mathcal{Z})$ deux applications. Si f et g sont mesurables, alors $g \circ f$ est mesurable.

Démonstration. *C'est évident : $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{Z}) = f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{Z})\big) \subset f^{-1}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}$.* □

Si X et Y sont deux espaces topologiques et $\mathcal{X} = \mathscr{B}(X)$ et $\mathcal{Y} = \mathscr{B}(Y)$ leurs tribus boréliennes, on dit souvent que $f : X \to Y$ est une fonction borélienne au lieu d'utiliser le terme mesurable.

Souvent, la tribu borélienne est sous-entendue notamment dans le cas de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\overline{\mathbb{R}}$...

Proposition 2.4.4: Réduction aux parties génératrices

Soit $f : (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ avec $\mathcal{Y} = \sigma(\mathscr{C})$. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathcal{X}$.

Démonstration. *C'est une conséquence immédiate du lemme de transport :*

$$\big(f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathcal{X}\big) \implies \Big(f^{-1}\big(\sigma(\mathscr{C})\big) = \sigma\big(f^{-1}(\mathscr{C})\big) \subset \mathcal{X}\Big).$$

□

Cette proposition a des conséquences fondamentales sur la mesurabilité des fonctions et applications classiques, que l'on retrouve dans une succession de corollaires.

Corollaire 2.4.5: Cas des fonctions à valeurs réelles

1. *Une fonction $f : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ est mesurable si est seulement si l'un des cas équivalents suivants se réalise :*
   (a) *l'image réciproque de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est dans $\mathcal{X}$;*
   (b) *l'image réciproque de tout intervalle de la forme $]a; b] \subset \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{X}$;*
   (c) *l'image réciproque de tout intervalle de la forme $]-\infty; b] \subset \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{X}$;*
   (d) *l'image réciproque de tout intervalle de la forme $]-\infty; b[\subset \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{X}$.*
2. *Une fonction $f : (X, \mathcal{X}) \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si si est seulement si l'un des cas équivalents suivants se réalise :*
   (a) *L'image réciproque de tout intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est dans $\mathcal{X}$.*
   (b) *l'image réciproque de tout intervalle de la forme $[-\infty; b[\subset \overline{\mathbb{R}}$ est dans $\mathcal{X}$;*
   (c) *l'image réciproque de tout intervalle de la forme $[-\infty; b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ est dans $\mathcal{X}$;*

<u>Démonstration.</u> *C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.2.5 sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$.* □

Corollaire 2.4.6: Exemples de fonctions et applications mesurables

1. *Une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.*
2. *Une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.*
3. *Soit A un sous-ensemble de X. La fonction $\mathbb{1}_A : X \to \{0, 1\}$ dite* ***indicatrice*** *de A (ou* ***caractéristique*** *de A) est définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.*
   Si on munit X d'une tribu $\mathcal{X}$, alors $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.
4. *Une application $f : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ est mesurable si et seulement si chaque coordonnée $f_i : (X, \mathscr{X}) \to \mathbb{R}$ est mesurable.*
5. *Une fonction $f : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{C}$, est mesurable si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont mesurables.*

<u>Démonstration.</u> *En exercice, en application de ce qui précède.* □

Évidemment, les opérations sur les fonction à valeurs réelles ou complexes ont un bon comportement par rapport à la mesurabilité. De même pour les bornes supérieures, inférieures et les limites de suites de fonctions.

Corollaire 2.4.7: Opérations sur les fonctions mesurables

1. *Soient $f, g : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mesurables, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sont mesurables.*
   (Vrai aussi en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\overline{\mathbb{R}}$ dès lors que l'on évite les formes indéterminées $\infty - \infty$ ou $0 \cdot \infty$).

2. *Soit $f : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mesurable non nulle. Alors $\frac{1}{f}$ est mesurable.*
3. *Soit une fonction $f : (X, \mathcal{X}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Pour tout $x \in X$, on note :*

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \textit{et} \quad f^-(x) = \min(-f(x), 0)$$

Ce sont deux fonctions positives telles que : $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. On a alors :

$$(f \textit{ mesurable}) \Leftrightarrow (f^+ \textit{ et } f^- \textit{ mesurables}) \implies (|f| \textit{ mesurable}).$$

4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{X})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \textit{sont mesurables.}$$

Voir la démonstration (page 62)

Les fonctions en escalier jouent un rôle essentiel dans la construction de l'intégrale de Riemann et sont bien sûr mesurables puisque constantes su des intervalles. De la même façon, les fonctions étagées, définies ci-dessous, qui généralisent la notion de fonction en escalier, sont les fonctions de base de la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue.

Définition 2.4.8: Fonctions étagées.

Une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est étagée *si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (distinctes) $y_1, y_2, \dots, y_n$. Si on note $A_i = \varphi^{-1}(\{y_i\})$, les A_i forment une partition de X et on a la décomposition canonique :*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}$$

On notera $\mathcal{E}t_m(X, \mathcal{X})$ l'ensemble des fonctions étagées mesurables et $\mathcal{E}t_m^+(X, \mathcal{X})$ le sous ensemble des fonctions étagées mesurables positives (ou simplement $\mathcal{E}t_m(X)$ et $\mathcal{E}t_m^+(X)$ si la tribu est sous-entendue).

Remarques 2.4.9: (À vérifier en exercice)

1. La décomposition canonique est caractérisée par :
   - $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une partition de X ;
   - $y_i \neq y_j$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ (avec éventuellement un des y_i nul) ;

   Elle est unique à permutation des indices près.
2. Si $\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}$ est la décomposition canonique, φ est mesurable si et seulement si chaque A_i est mesurable.
3. Dans cette décomposition canonique, il se peut que l'un des y_i soit nul. Il faut cependant en

tenir compte dans l'écriture $\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}$ pour que les A_i forment une partition de X.

4. Soient $E_1, \dots, E_q$ des sous ensembles de X et $a_1, \dots, a_q$ des réels. La fonction $\varphi = \sum_{k=1}^{q} a_k \mathbb{1}_{E_k}$ est étagée, mais **attention**, ce n'est pas nécessairement la décomposition canonique de φ : les E_k peuvent ne pas être disjoints, les valeurs de a_k ne pas être distinctes, et φ peut être mesurable sans que chaque E_k le soit ! Par exemple si $E \subset X$ n'est pas mesurable, la fonction $\varphi = 1_X$ (mesurable, constante égale à 1) s'écrit aussi $\varphi = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_{X \setminus E}$.

Proposition 2.4.10: Structure de l'espace des fonctions étagées

Soit $(X, \mathcal{X})$ un espace mesurable.
L'ensemble $\mathcal{E}t_m(X)$ est une algèbre (espace vectoriel + anneau). De plus si φ et ψ sont étagées mesurables, alors $\max(\varphi, \psi)$ et $\min(\varphi, \psi)$ aussi (on dit que c'est une algèbre réticulée).
L'ensemble $\mathcal{E}t_m^+(X)$ des fonctions étagées mesurables positives est un cône (le cône positif) de cet espace vectoriel, i.e. stable par addition et produit par des scalaires positifs.

Démonstration. *En exercice* □

Exercice 2.4.11: Contruction de la décomposition canonique

Soit $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, où les a_k sont des réels quelconques, et les $A_k \subset X$ quelconques. Pour retrouver la décomposition canonique de φ, on considère : $\mathscr{C} = \left\{ \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} A_j^c : I \subset \{1, \dots, n\} \right\} \setminus \{\varnothing\}$.

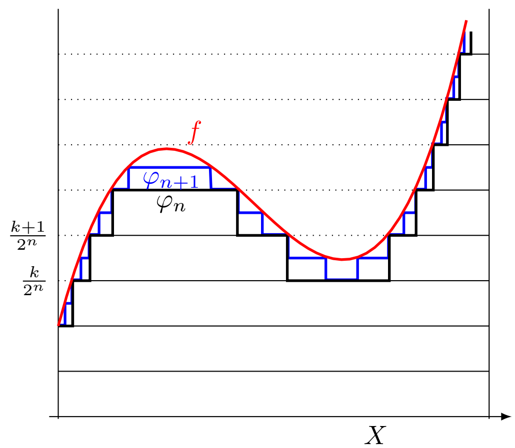
1. Montrer que les éléments de $\mathscr{C}$ forment une partition (finie) de X et que :
$$\forall C \in \mathscr{C}_1,\ (C \cap A_i \neq \varnothing) \iff (C \subset A_i).$$
2. Vérifier que si $C = \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} A_j^c \in \mathscr{C}_1,\ I \subset \{1, \dots, n\}$ alors φ est constante sur C, égale à $b_C = \sum_{i \in I} a_i$. En déduire que : $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{C \in \mathscr{C}} b_C \mathbb{1}_C$.
3. Soit $V = \{b_C : C \in \mathscr{C}\}$. Notons $b_1 < b_2 < \cdots < b_p$ ses éléments (ordonnés dans l'ordre croissant). Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on pose $\mathscr{C}_k = \{C \in \mathscr{C} : b_C = b_k\}$ et $B_k = \bigcup_{C \in \mathbb{C}_k} C$.
Vérifier que : $\varphi = \sum_{k=1}^{p} b_k \mathbb{1}_{B_k}$ est la décomposition canonique de φ.

Le théorème suivant est crucial dans la construction de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 2.4.12: Approximation par des fonctions étagées mesurables positives.

Soit $f : (X, \mathcal{X}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Il existe une suite croissante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}t_m^+(X)$ qui converge vers f simplement. De plus, si f est bornée, on peut construire (φ_n) de sorte que la convergence soit uniforme sur X.

Voir la démonstration (page 63)



Les démonstrations du chapitre 2

Proposition: intersection d'algèbres

Toute intersection d'algèbres de parties sur un ensemble X est une algèbre de parties sur X.

Démonstration. *Retour page 32*
Soit $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'algèbre de parties. On note $\mathscr{A} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$.
Tout d'abord, X et $\varnothing$ sont dans chaque $\mathscr{A}_i$ donc dans $\mathscr{A}$.
Si A et B sont dans $\mathscr{A}$ alors pour tout $i \in I$, $A \in \mathscr{A}_i$ et $B \in \mathscr{A}_i$ donc $A^c \in \mathscr{A}_i$ et $A \cup B \in \mathscr{A}_i$. Ainsi $A \cup B \in \mathscr{A}$ et $A^c \in \mathscr{A}$.
Ce qui prouve que $\mathscr{A}$ est une algèbre de parties. □

Proposition: intersection de tribus

Toute intersection de σ-algèbres sur un ensemble X est une σ-algèbre sur X.

Démonstration. *Retour page 33*
Soit $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus. On note $\mathscr{A} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$.
Tout d'abord, $\mathscr{A}$ est une algèbre de parties d'après ce qui précède. Reste à voir que $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathscr{A}$ alors pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathscr{A}_i$. Ainsi, pour tout $i \in I$, comme $\mathscr{A}_i$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}_i$. Et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$. □

Proposition: Comportement séquentiel des mesures

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.

1. ***Sous additivité :*** *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille au plus dénombrable de $\mathscr{M}$,*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ (sous additivité).}$$

2. ***Continuité par limite croissante*** *: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathscr{M}$ alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow}\mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

3. ***Continuité par limite décroissante*** *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante dans $\mathscr{M}$ et si il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ alors*

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\downarrow} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow}\mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

* * * * * * * * * *

On peut remplacer la propriété de sous-additivité par la propriété plus générale (mais équivalente) : pour toute famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{M}$, $\mu\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \le \sum_{i\in I} \mu(A_i)$.

Démonstration. *Retour page 34*

1. *Considérons une suite $(A_n]_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}$. On construit les ensembles deux à deux disjoints C_n, $n \in \mathbb{N}$ suivants :*

$$C_0 = A_0 \qquad \text{et pour } n \in \mathbb{N}^* \quad C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

(cf. exercice 2.1.6). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$C_n \subset A_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigsqcup_{k=0}^{n} C_k \quad \text{donc} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Ainsi, grâce à la σ-additivité et la croissance des mesures

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

2. *On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Alors les B_n sont deux à deux disjoints, $A_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} B_k$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Ainsi grâce à la σ-additivité :*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} A_n\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow}\mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3. *Sans perte de généralité, on peut supposer que* $n_0 = 0$*, quitte à oublier les premiers* A_n*. On utilise le cas précédent en considérant la suite des* $D_n = A_0 \setminus A_n$*,* $n \in \mathbb{N}$ *qui est croissante. On a donc*
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} D_n\Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow} \mu(D_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n).$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $A_n \sqcup D_n = A_0$ *donc* $\mu(D_n) + \mu(A_n) = \mu(A_0) < +\infty$ *et*
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} D_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} (A_0 \setminus A_n) = A_0 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\downarrow} A_n \subset A_0 \quad \textit{et} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_0.$$
Donc
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} D_n\Big) = \mu(A_0) - \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\downarrow} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow} (\mu(A_0) - \mu(A_n)) = \mu(A_0) - \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \mu(A_n) < +\infty$$
et ainsi
$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\downarrow} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

$\square$

Lemme: Lemme π-λ de Dynkin

1. *Une intersection quelconque de λ-systèmes est un λ-système. Il existe donc un plus petit λ-système contenant $\mathscr{C}$ noté $\lambda(\mathscr{C})$: c'est l'intersection de tous les λ-systèmes contenant $\mathscr{C}$.*
2. *Un ensemble de parties $\mathscr{C}$ de X est une tribu si et seulement si c'est à la fois un π-système et un λ-système.*
3. ***Lemme de Dynkin.** Soit $\mathscr{C}$ un π-système. Alors $\lambda(\mathscr{C})$ est encore un π-système et donc $\sigma(\mathscr{C}) = \lambda(\mathscr{C})$.*

Démonstration. *Retour page 37*

1. *En exercice (remarquer que $\mathscr{P}(X)$ est un λ-système).*
2. *Une tribu est évidemment un π-système et un λ-système.*
   Réciproquement, supposons que $\mathscr{C}$ est un π-système et un λ-système.
   — *$\mathscr{C}$ est un λ-système donc $X \in \mathscr{C}$ et si $A \in \mathscr{C}$, $A^c = X \setminus A \in \mathscr{C}$: $\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire.*
   — *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathscr{C}$, comme $\mathscr{C}$ est un π-système stable par passage au complémentaire, $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k = \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k^c\right)^c \in \mathscr{C}$. On en déduit que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}$. Comme $\mathscr{C}$ est un λ-système, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} B_n \in \mathscr{C}$.*

   Ainsi $\mathscr{C}$ est une tribu.
3. *D'après 1. et 2., il suffit de montrer que $\lambda(\mathscr{C})$ est un π-système c'est à dire :*
   $$\forall A, B \in \lambda(\mathscr{C}),\ A \cap B \in \lambda(\mathscr{C}).$$
   En effet, on a toujours $\mathscr{C} \subset \lambda(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$. Si de plus $\lambda(\mathscr{C})$ est un π-système, d'après 2 c'est une tribu contenant $\mathscr{C}$ donc contenant $\sigma(\mathscr{C})$ d'où $\lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.

   L'idée pour montrer que $\lambda(\mathscr{C})$ est un π-système consiste à fixer A et faire varier B puis faire varier A. Pour $A \in \lambda(\mathscr{C})$ fixé, notons
   $$\mathscr{L}_A = \{B \in \lambda(\mathscr{C})\ :\ A \cap B \in \lambda(\mathscr{C})\}.$$
   - *$\mathscr{L}_A$ est un λ-système.*

   — *$X \in \mathscr{L}_A$ est évident ;*
   — *si $B_1, B_2 \in \mathscr{L}_A$, $B_1 \subset B_2$, alors $B_2 \setminus B_1 \in \lambda(\mathscr{C})$ et $(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A) \in \lambda(\mathscr{C})$ donc $B_2 \setminus B_1 \in \mathscr{L}_A$;*
   — *si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{L}_A$, alors $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} B_n\right) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} (B_n \cap A) \in \lambda(\mathscr{C})$ donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{L}_A$.*
   - *De plus, dans le cas particulier où $A \in \mathscr{C}$ alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}_A$. En effet, si $A \in \mathscr{C}$ alors*
   $$\forall B \in \mathscr{C} \subset \lambda(\mathscr{C}) \qquad A \cap B \in \mathscr{C} \subset \lambda(\mathscr{C}) \qquad \text{donc} \quad \mathscr{L}_A \text{ contient } \mathscr{C}.$$

On fait maintenant varier A. On pose :

$$\begin{cases} \mathscr{L} = \bigcap_{A \in \mathscr{C}} \mathscr{L}_A = \Big\{ B \in \lambda(\mathscr{C}) \ : \ \forall A \in \mathscr{C},\ A \cap B \in \lambda(\mathscr{C}) \Big\} \\ \\ \mathscr{L}' = \bigcap_{A \in \lambda(\mathscr{C})} \mathscr{L}_A = \Big\{ B \in \lambda(\mathscr{C}) \ : \ \forall A \in \lambda(\mathscr{C}),\ A \cap B \in \lambda(\mathscr{C}) \Big\} \end{cases}$$

Ce sont deux λ-systèmes vérifiant

$$\mathscr{C} \subset \mathscr{L} \subset \lambda(\mathscr{C}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}' \subset \mathscr{L} \subset \lambda(\mathscr{C}).$$

La double inclusion de gauche nous dit que $\mathscr{L} = \lambda(\mathscr{C})$. Ainsi, on a :

$$\mathscr{L}' \subset \mathscr{L} = \lambda(\mathscr{C}).$$

De plus, par construction $\mathscr{L}'$ est un π-système. Si on montre que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}'$, on aura : $\lambda(\mathscr{C}) = \mathscr{L}'$ est un π système donc une tribu.
L'idée est de renverser les rôles de A et B. Soit $B \in \mathscr{C}$. Comme $\lambda(\mathscr{C}) = \mathscr{L}$, pour tout $A \in \lambda(\mathscr{C})$, on a : $A \in \mathscr{L} \subset \mathscr{L}_B$ et donc $A \cap B \in \lambda(\mathscr{C})$ et donc $B \in \mathscr{L}'$.

□

Théorème: Théorème d'unicité de mesure

Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathscr{M})$ et $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}$ un π-système qui engendre $\mathscr{M}$ tels que :

$$\forall A \in \mathscr{C},\ \mu(A) = \nu(A) < +\infty.$$

1. *Si $X \in \mathscr{C}$, alors $\mu = \nu$ et ce sont des mesures finies.*
2. *Sinon, si X est union d'une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}$, alors $\mu = \nu$ et sont des mesures σ-finies.*

Démonstration. Retour page 38

1. On suppose que $X \in \mathscr{C}$, ce qui assure que $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$ et donc pour tout $A \in \mathscr{M}$ on a $\mu(A) < +\infty$ et $\nu(A) < +\infty$.
   Soit $\mathscr{L} = \{A \in \mathscr{M}\ :\ \mu(A) = \nu(A)\}$. On a $\mathscr{C} \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{M}$. Si $A, B \in \mathscr{L}$ alors

   $$(A \subset B) \implies \big(\mu(B \smallsetminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \smallsetminus A)\big) \implies (B \smallsetminus A \in \mathscr{L})$$

   On a donc stabilité par "différence interne". Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{L}$ alors (cf. proposition 2.1.11) :

   $$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} A_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) = \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} A_n\Big)$$

   donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{L}$. Donc $\mathscr{L}$ est un λ-système contenant $\mathscr{C}$ qui est un π-système. D'après le lemme de Dynkin, $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{C}) = \lambda(\mathscr{C}) \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{M}$ donc $\mathscr{M} = \mathscr{L}$.
2. Si X n'est pas dans $\mathscr{C}$ mais est union d'une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}$ alors en appliquant le cas précédent au π-système $\mathscr{C}_n = \{A \cap X_n : A \in \mathscr{C}\}$ de X_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les mesures μ est ν coïncident et sont finies sur la tribu $\mathscr{M}_n = \sigma(\mathscr{C}_n) \subset \mathscr{P}(X_n)$ de X_n (attention ! la tribu $\mathscr{M}_n$ est la tribu engendrée par $\mathscr{C}_n$ dans $\mathscr{P}(X_n)$: ce n'est surtout pas une tribu sur X). Or

   $$\mathscr{M}' = \{A \in \mathscr{M} : \forall n \in \mathbb{N}\ A \cap X_n \in \mathscr{M}_n\}$$

   est une tribu (exercice) qui contient $\mathscr{C}$ et est contenue dans $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{C})$, donc $\mathscr{M}' = \mathscr{M}$. Ainsi pour tout $A \in \mathscr{M}$, on a

   $$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} A \cap X_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap E_n) < +\infty \quad (\text{car } A \cap X_n \in \mathscr{M}_n).$$

   On en déduit l'égalité de μ et de ν en vertu de la proposition 2.1.11 et leur σ-finitude en prenant $A = X$.

$\square$

Lemme: Sous-additivité de la mesure extérieure

La mesure extérieure μ^* associée à une pré-mesure μ est croissante et sous additive :

1. *Si $E \subset F$ alors $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;*
2. *Pour toute suite de parties $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a $\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(E_k)$.*

Démonstration. Retour page 39

1. *La croissance est facile : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une de suite de $\mathscr{A}$ telle que $F \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors*

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{et donc} \quad \mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On en déduit que $\mu^*(E)$ est un minorant des sommes $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toutes les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ recouvrant F. Par caractérisation de la borne inférieure on a bien $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

2. *Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{P}(X)$. Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(A_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ telle que*

$$\mu^*(E_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_{k,n}) \leq \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Ainsi par application du théorème de sommation par paquets, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_{k,n}) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{k+n\leq n} \mu(A_{k,n}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(E_k) + \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(E_k) + \varepsilon.$$

Posons $A_p = \bigcup_{k+n\leq p} A_{k,n} \in \mathscr{A}$ (union finie). Alors :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{k,n} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{k+n=p} A_{k,n} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p$$

Alors comme μ est une pré-mesure

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq \sum_{p\in\mathbb{N}} \mu(A_p) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \mu\Big(\bigcup_{k+n\leq p} A_{k,n}\Big) \leq \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{k+n\leq p} \mu(A_{k,n}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(E_k) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient bien l'inégalité

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(E_k).$$

$\square$

Théorème: Théorème de prolongement de Caratheodory.

Soit $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une pré-mesure sur une algèbre de parties $\mathscr{A}$ de X, et μ^* la mesure extérieure associée à μ. Alors :

1. *La restriction de μ^* à $\mathscr{A}$ coïncide avec μ ;*
2. *L'ensemble $\mathscr{M}$ des sous-ensembles μ^*-mesurables est une tribu contenant $\mathscr{A}$ (en particulier $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}$) ;*
3. *La restriction de μ^* à $\mathscr{M}$ est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ (de même en remplaçant $\mathscr{M}$ par $\sigma(\mathscr{A})$).*

Démonstration. *Retour page 39*

1. Si $E \in \mathscr{A}$ alors $\mu^*(E) = \mu(E)$.

— *En prenant la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ définie par $A_0 = E$ et $A_n = \varnothing$ pour $n \geq 1$ on a :*

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(E).$$

— *Réciproquement soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{A}$ telle que $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*
On considère la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de parties deux à deux disjointes définie par

$$E_0 = E \cap A_0 \subset A_0, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \; E_n = E \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right) \subset A_n \qquad \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \mathscr{A}$ car $\mathscr{A}$ est une algèbre de parties. Comme μ est une pré-mesure, on a (par croissance et σ-additivité) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(E_n) \leq \mu(A_n) \qquad \text{et} \qquad \mu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Par conséquent $\mu(E) \leq \mu^*(E)$ et donc $\mu(E) = \mu^*(E)$.

2. a) Pour tout $A \in \mathscr{A}$ et tout $E \in \mathscr{P}(X)$ on a : $\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$.

— *On sait déjà que $\mu^*(E) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$ (sous-additivité de μ^*, lemme 2.3.8).*
— *Soit $E \in \mathscr{P}(X)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$ telle que :*

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{et} \qquad \mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Soit $A \in \mathscr{A}$. On a évidemment : $A \cap E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap A_n) \qquad A^c \cap E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A^c \cap A_n)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap A_n \in \mathscr{A}$ et $A^c \cap A_n \in \mathscr{A}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A^c \cap A_n) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \big(\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)\big) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

ceci étant vrai pour $\varepsilon > 0$ arbitraire. Donc on obtient l'inégalité réciproque :

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E).$$

2.b) L'ensemble $\mathscr{M} = \{A \in \mathscr{P}(X) : \forall E \in \mathscr{P}(X)\ \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E)\}$ est une tribu.

— *X est dans $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}$ est stable par passage au complémentaire (évident) ;*
— *Montrons tout d'abord que $\mathscr{M}$ est stable par union finie : c'est donc une algèbre. Soient A et B dans $\mathscr{M}$. Par sous-additivité de μ^* on a :*

$$\mu^*(E) \leq \mu^*\big((A \cup B) \cap E\big) + \mu^*\big((A \cup B)^c \cap E\big).$$

Montrons l'égalité inverse . Du fait que $B \in \mathscr{M}$, on tire que pour tout $E \in \mathscr{P}(X)$:

$$\mu^*(E) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B^c \cap E)$$

et du fait que $A \in \mathscr{M}$ en remplaçant E successivement par $B \cap E$ et $B^c \cap E$, il vient :

$$\begin{cases} \mu^*\big(B \cap E\big) = \mu^*\big(A \cap (B \cap E)\big) + \mu^*\big(A^c \cap (B \cap E)\big) \\ \mu^*\big(B^c \cap E\big) = \mu^*\big(A \cap (B^c \cap E)\big) + \mu^*\big(A^c \cap (B^c \cap E)\big) \end{cases}$$

et donc en combinant les trois expressions :

$$\mu^*(E) = \mu^*\big((A \cap B) \cap E\big) + \mu^*\big((B \setminus A) \cap E\big) + \mu^*\big((A \setminus B) \cap E)\big) + \mu^*\big((A \cup B)^c \cap E\big)$$

Or $(A \cap B) \sqcup (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) = A \cup B$ donc par sous-additivité de μ^* (lemme 2.3.8) on a :

$$\mu^*\big((A \cup B) \cap E)\big) \leq \mu^*\big((A \cap B) \cap E)\big) + \mu^*\big((A \setminus B) \cap E)\big) + \mu^*\big((B \setminus A) \cap E)\big)$$

et donc

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\big((A \cup B) \cap E\big) + \mu^*\big((A \cup B)^c \cap E\big).$$

D'où l'égalité pour tout $E \in \mathscr{P}(X)$:

$$\mu^*(E) = \mu^*\big((A \cup B) \cap E\big) + \mu^*\big((A \cup B)^c \cap E\big).$$

— *$\mathscr{M}$ est stable par union dénombrable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}$ et A leur union. On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties disjointes de $\mathscr{M}$ définie par $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ pour $n \geq 1$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathscr{M}$ car $\mathscr{M}$ est une algèbre). Évidemment,*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} B_n \qquad \text{et} \qquad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Pour tout $E \in \mathscr{P}(X)$, on a par sous-additivité de μ^* (lemme 2.3.8) :

$$(*) \qquad \mu^*(E) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}$, en remplaçant E par $A_{n+1} \cap E$, il vient :

$$\begin{aligned} \mu^*(A_{n+1} \cap E) &= \mu^*(B_n \cap A_{n+1} \cap E) + \mu^*(B_n^c \cap A_{n+1} \cap E) \\ &= \mu^*(B_n \cap E) + \mu^*(A_n \cap E) \end{aligned}$$

et donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $E \in \mathscr{P}(X)$:

$$\mu^*(A_n \cap E) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(B_k \cap E).$$

Ainsi, comme $A_n \subset A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu^*(E) = \mu^*(A_n \cap E) + \mu^*(A_n^c \cap E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(B_k \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ et par sous-additivité de μ^* il vient :

$$\begin{aligned} (**) \quad \mu^*(E) &\geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(B_k \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \\ &\geq \mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \cap E\Big) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E). \end{aligned}$$

En combinant $(*)$ et $(**)$, on a donc obtenu l'égalité prouvant que $\mathscr{M}$ est une tribu :

$$\forall E \in \mathscr{P}(X) \qquad \mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

3. La restriction de μ^* à $\mathscr{M}$ est une mesure.

— *$\mu^*(\varnothing) = 0$ (évident) ;*
— *Si on reprend les relations $(*)$ et $(**)$ dans le cas où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties disjointes de $\mathscr{M}$, auquel cas $B_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si on choisit $E = A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ on a la σ-additivité :*

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

$\square$

Corollaire: Existence de la mesure de Lebesgue

1. *Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, appelée* **mesure le Lebesgue** *vérifiant :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b, \quad \lambda(]a, b]) = b - a.$$

2. *Plus généralement, il existe une unique mesure λ_d sur$(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$, vérifiant :*
si $a = (a_1, \dots, a_d)$ et $b = (b_1, \dots, b_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ satisfont $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ $a_i \leq b_i$ alors

$$\lambda_d\Big(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i]\Big) = \prod_{i=1}^d \lambda\big(]a_i, b_i]\big) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

(si $d = 1$, $\lambda_1 = \lambda$). On l'appelle également mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$,

Démonstration. *Retour page 40*
Pour $d = 1$ (le cas général est analogue).

- ***Unicité***. *On remarque que $\mathcal{I} = \big\{]a, b] \ :\ -\infty < a \leq b < +\infty\big\}$ est un π-système générateur de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. On peut appliquer le théorème d'unicité pour avoir l'unicité de λ.*
- ***Existence***.
  - ⋆ *L'algèbre des parties $\mathscr{A}$ engendrée par $\mathcal{I} = \big\{]a, b] \ :\ -\infty < a \leq b < +\infty\big\}$ est l'ensemble des unions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{I}$ auquel on adjoint $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ et les intervalles de la forme $]a; +\infty[$ et $]-\infty; b]$. Ses éléments sont de donc de la forme*

$$A = \begin{cases}]a_1; b_1] \sqcup]a_2; b_2] \sqcup \cdots \sqcup]a_n; b_n] & -\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n < +\infty \\ \\ ]a_1; b_1] \sqcup]a_2; b_2] \sqcup \cdots \sqcup]a_n; +\infty[& -\infty \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < +\infty \end{cases}$$

Pour simplifier, on convient de noter $b_n = +\infty$ dans le second cas et d'identifier $[a_n; +\infty[$ avec $[a_n; +\infty]$ (ce qui revient à se placer sur $\mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$)..

  - ⋆ *On prolonge λ (définie seulement sur $\mathcal{I}$) en une pré-mesure sur $\mathscr{A}$ par additivité en posant :*

$$\lambda(A) := \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \geq 0 \qquad \text{avec } \lambda(A) = +\infty \text{ au cas où } a_1 = -\infty \text{ ou } b_n = +\infty)$$

λ est alors clairement additive (et donc croissante, puisque positive) :

$$\text{si } A \text{ et } B \text{ sont dans } \mathscr{A} \text{ alors} \quad \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

En effet, il suffit de le vérifier pour deux intervalles non disjoints de $\mathcal{I}$: si $a < c < b < d$,

$$\lambda(]a; b] \cup]c; d]) + \lambda(]a; b] \cap]c; d]) = \lambda(]a; d]) + \lambda(]c; b]) = d - a + b - c = \lambda(]a; b]) + \lambda(]c; d]).$$

  - ⋆ *Montrons que λ est σ-additive sur $\mathcal{I}$: si $]a; b]$ ($-\infty < a \leq b < +\infty$) est un intervalle de $\mathcal{I}$ et I un ensemble dénombrable*

$$\left(]a; b] = \bigsqcup_{i \in I}]a_i; b_i]\right) \implies \left(b - a = \sum_{i \in I} (b_i - a_i)\right).$$

Supposons ainsi que $]a;b] = \bigsqcup_{i\in I}]a_i;b_i]$.

Inégalité facile : pour toute partie **finie** $J \subset I$, $\bigsqcup_{i\in J}]a_i;b_i] \subset]a,b]$. *Donc* $\sum_{i\in J}(b_i - a_i) \leq b - a$.

Ce qui nous donne

$$(*) \quad \sum_{i\in I}(b_i - a_i) \leq b - a.$$

L'inégalité inverse est plus délicate et utilise la compacité.

On rappelle le théorème de Heine-Borel :

1. *Dans* $\mathbb{R}$ *de tout recouvrement d'un intervalle compact* $[a;b]$ $(-\infty < a \leq b < +\infty)$ *par des intervalles ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
2. *Plus généralement : dans un espace métrique, de tout recouvrement d'un compact par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

L'idée consiste à "grossir" les intervalles $]a_i;b_i]$ *pour recouvrir* $[a;b]$ *et d'utiliser la compacité pour se ramener à un nombre fini d'intervalles.*
On se fixe une famille sommable de réels strictement positifs $(t_i)_{i\in I}$ *de somme* $\sum_{i\in I} t_i = 1$. *(Une telle famille existe puisque* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$ *: on peut s'y ramener quitte à ré-indexer* $(t_i)_{i\in I}$ *avec les entiers). Pour tout* $\varepsilon > 0$ *la famille des intervalles* $\big(]a_i;b_i+\varepsilon t_i[\big)_{i\in I}$ *auquel on ajoute l'intervalle* $]a-\varepsilon;a+\varepsilon[$ *est un recouvrement du compact* $[a;b]$ *:*

$$[a;b] \subset]a-\varepsilon;a+\varepsilon[\cup \bigcup_{i\in I}]a_i;b_i+\varepsilon t_i[$$

*dont on peut extraire un sous recouvrement fini (**théorème de Heine-Borel**) : il existe* J_ε *fini dans* I *tel que* $]a,b] \subset [a,b] \subset]a-\varepsilon;a+\varepsilon[\cup \bigcup_{i\in J_\varepsilon}]a_i;b_i+\varepsilon t_i[$ *donc par additivité*

$$b - a \leq 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{i\in J_\varepsilon} t_i + \sum_{i\in J_\varepsilon}(b_i - a_i) \leq 3\varepsilon + \sum_{i\in I}(b_i - a_i).$$

L'inégalité $b - a \leq \sum_{i\in I}(b_i - a_i) + 3\varepsilon$. *est valable pour tout* $\varepsilon > 0$ *donc*

$$(**) \quad b - a \leq \sum_{i\in I}(b_i - a_i).$$

La combinaison de $(*)$ *et* $(**)$ *prouve la* σ*-additivité sur* $\mathcal{I}$.

⋆ *La* σ*-additivité de* λ *sur* $\mathcal{I}$ *s'étend à la* σ*-additivité sur* $\mathcal{I} \cup \{]a;+\infty[: a \in \mathbb{R}\}$ *:*
si $]a;+\infty[= \bigsqcup_{i\in I}]a_i;b_i]$, *alors pour tout* $b \in \mathbb{R}$ $b > a$, $]a;b] \subset \bigsqcup_{i\in I}]a_i;b_i]$ *donc* $b - a \leq \sum_{i\in I}(b_i - a_i)$ *d'où* $\sum_{i\in I}(b_i - a_i) = +\infty = \lambda(]a;+\infty[)$.

⋆ *L'additivité de λ sur $\mathscr{A}$ et la σ-additivité sur $\mathcal{I} \cup \{]a; +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$ donne immédiatement σ-additivité sur $\mathscr{A}$ puisque tout élément de $\mathscr{A}$ ou son complémentaire est union finie d'éléments de $\mathcal{I} \cup \{]a; +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$. On peut alors appliquer le* théorème de Caratheodory.

$\square$

Lemme: Lemme de transport

Soit $f : X \to Y$ une application.

1. ***Tribu image réciproque.*** *Si $\mathcal{Y}$ est une tribu de Y alors $f^{-1}(\mathcal{Y}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{Y}\}$ est une tribu sur X.*
2. ***Tribu image.*** *Soit $\mathcal{X}$ une tribu sur X. Alors $\{B \in \mathscr{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{X}\}$ est une tribu sur Y.*
3. ***Lemme de transport.*** *Soit $\mathscr{C}$ une famille de parties de Y. Alors $\sigma\big(f^{-1}(\mathscr{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathscr{C})\big)$.*

Démonstration. *Retour page 43*

1. *Laissé en exercice.*
2. *Laissé en exercice.*
3. *Tout d'abord d'après 1, $f^{-1}\big(\sigma(\mathscr{C})\big)$ est une tribu et elle contient bien sûr $f^{-1}(\mathscr{C})$. Donc elle contient $\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$ (voir la propriété caractéristique des tribus engendrées). On a donc*

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C})) \subset f^{-1}\big(\sigma(\mathscr{C})\big).$$

Pour l'inclusion inverse, on considère la tribu image $\mathscr{M} = \{B \in \mathscr{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))\}$. D'après 2, c'est bien une tribu sur Y, qui contient $\mathscr{C}$. Donc elle contient $\sigma(\mathscr{C})$. Mais alors on a les inclusions :

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathscr{C})\big) \subset f^{-1}(\mathscr{M}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))$$

la seconde inclusion venant de la définition de $\mathscr{M}$.

□

Corollaire: Opérations sur les fonctions mesurables

1. *Soient* $f, g : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ *mesurables,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors* $\alpha f + \beta g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ *sont mesurables.*
   (Vrai aussi en remplaçant $\mathbb{R}$ *par* $\overline{\mathbb{R}}$ *dès lors que l'on évite les formes indéterminées* $\infty - \infty$ *ou* $0 \cdot \infty$*).*
2. *Soit* $f : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ *mesurable non nulle. Alors* $\frac{1}{f}$ *est mesurable.*
3. *Soit une fonction* $f : (X, \mathcal{X}) \to \overline{\mathbb{R}}$. *Pour tout* $x \in X$, *on note :*

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{et} \quad f^-(x) = \min(-f(x), 0)$$

   Ce sont deux fonctions positives telles que : $f = f^+ - f^-$ *et* $|f| = f^+ + f^-$. *On a alors :*

$$(f \text{ mesurable}) \Leftrightarrow (f^+ \text{ et } f^- \text{ mesurables}) \implies (|f| \text{ mesurable}).$$

4. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* $(X, \mathcal{X})$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *Alors :*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \qquad \text{sont mesurables.}$$

Démonstration. Retour page 44

1. *La fonction* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ L(x, y) = \alpha x + \beta y$ *est continue donc mesurable donc par composition, l'application* $L(f, g) = \alpha f + \beta g : (X, \mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ *est mesurable.*
   Même raisonnement en prenant $L(x, y) = xy$ *puis* $L(x, y) = \max(x, y)$ *et* $L(x, y) = \min(x, y)$, *qui sont continues, donc mesurables.*
2. *La fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$, *donc mesurable. Par composition,* $1/f$ *est mesurable.*
3. *C'est une conséquence immédiate de 1.*
4. *Il suffit de remarquer que*

$$\big(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq y\big) \iff \big(\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x) \leq y\big) \iff \big(x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty; y])\big)$$

   puis que $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$.

$\square$

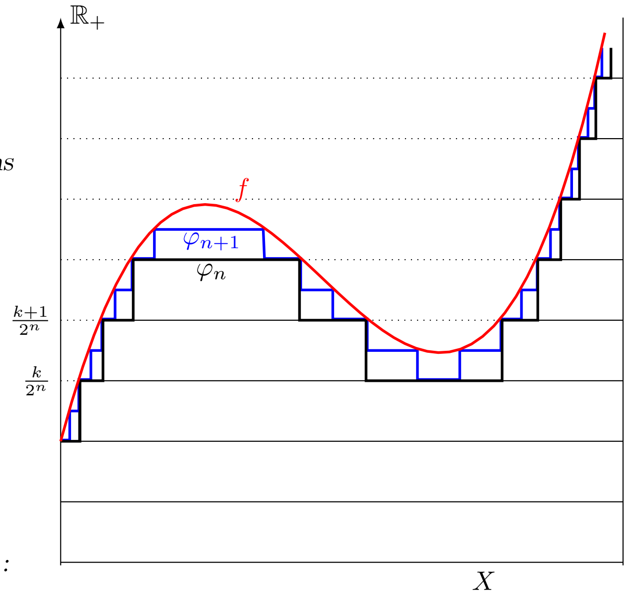
Théorème: Approximation par des fonctions étagées mesurables positives.

Soit $f : (X, \mathcal{X}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Il existe une suite croissante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}t_m^+(X)$ qui converge vers f simplement. De plus, si f est bornée, on peut construire (φ_n) de sorte que la convergence soit uniforme.

Démonstration. *Retour page 47*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{si } f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right[\\ & \text{et } 0 \leq k < n2^n \\ & \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$



C'est une suite croissante de fonctions étagées mesurables positives.
En effet, notons :

$$E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)$$
$$= \left\{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}$$

pour $0 \leq k < n2^n$ et

$$E_{n,n2^n} = f^{-1}([n, +\infty[) = \{f \geq n\}$$

Ces ensembles sont mesurables et on a :

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,k}} \qquad \left(X = \bigsqcup_{k=0}^{n2^n} E_{n,k}\right)$$

c'est donc une fonction étagée mesurable positive. De plus :

- *pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n2^n - 1\}$: $E_{n,k} = E_{n+1,2k} \sqcup E_{n+1,2k+1}$ autrement dit :*

$$\left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{2k}{2^{n+1}} \leq f < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \sqcup \left\{\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right\}$$

donc : $\boxed{\forall x \in E_{n,k},\ \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x) < \varphi_{n+1}(x) + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n}.}$

- *pour $k = n2^n$:*

$$[n, +\infty[= \bigsqcup_{\ell=0}^{2^{n+1}-1} \left[n + \frac{\ell}{2^{n+1}}, n + \frac{\ell+1}{2^{n+1}}\right[\sqcup \left[n+1, +\infty\right[$$

c'est à dire $$\{f \geq n\} = \bigsqcup_{\ell=0}^{2^{n+1}-1} \left\{n + \frac{\ell}{2^{n+1}} \leq f < n + \frac{\ell+1}{2^{n+1}}\right\} \sqcup \{f \geq n+1\}$$

$$\text{autrement dit} \qquad E_{n,n2^n} = \bigsqcup_{\ell=0}^{2^{n+1}-1} E_{n+1,n2^{n+1}-\ell}$$

d'où : $\boxed{\forall x \in E_{n,n2^n},\ \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x).}$

Ainsi, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

Enfin, pour tout $x \in X$*, si* $n > f(x)$*, alors :* $\boxed{(\star) \qquad 0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \dfrac{1}{2^n}}$

donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement (en croissant) vers* f*.*
Remarque : si f *est bornée, alors* $(\star)$ *est vraie pour tout* x *pour* n *plus grand que* $M = \sup|f|$ *(car* $E_{n,n2^n} = \varnothing$*), d'où la convergence uniforme.* $\square$

Chapitre 3

L'intégrale de Lebesgue

3.1 Intégrale de Lebesgue pour les fonctions positives

Il est opportun de faire le rapprochement entre l'intégration et les familles sommables. On rappelle qu'on étend l'arithmétique et la relation d'ordre de $\mathbb{R}_+$ à $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$: pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$:

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \ , \qquad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases} \ , \qquad \text{et} \qquad a \leq +\infty$$

3.1.1 Intégrale pour les fonctions étagées mesurables positives

Définition 3.1.1: Cas des fonctions étagées

Soit $\varphi : (X, \mathscr{M}, \mu) \to \mathbb{R}_+$ une fonction étagée mesurable positive, prenant les valeurs distinctes $a_1, \ldots, a_p$, de décomposition canonique : $\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ (les $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1, \ldots, p$ forment une partition de X). On définit l'intégrale de φ par rapport à μ :

$$(*) \qquad \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{p} a_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

* * * * * * * * * *

Plus généralement, si $\varphi \in \mathcal{E}_m^+(X)$ et $A \in \mathscr{M}$, alors $\mathbb{1}_A \times \varphi \in \mathcal{E}_m^+(X)$ et on note $\displaystyle\int_A \varphi \, \mathrm{d}\mu := \int \mathbb{1}_A \times \varphi \, \mathrm{d}\mu$.

Remarques 3.1.2: (À vérifier en exercice)

1. Si $A \in \mathscr{M}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, en remarquant que $\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$, on a

$$\int \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A) \quad \text{et} \quad \int a \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = a\mu(A) = \int a \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

On peut donc réécrire la formule $(*)$ définissant l'intégrale dans la définition 3.1.1 pour la décomposition canonique de φ :

$$\int \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{p} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i \int \mathbb{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu.$$

(ce sont les prémices de la linéarité).

2. Si A et B sont disjoints

$$\int \Big(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\Big) \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{1}_{A \sqcup B} \,\mathrm{d}\mu = \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) = \int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu + \int \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\mu$$

3. Fort de ces deux remarques, on peut élargir les hypothèses de la définition 3.1.1 ; la formule $(*)$ est encore vraie si à la place de l'écriture canonique on a $\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec les conditions plus larges suivantes :

— les A_i sont disjoints deux à deux ;
— certains des A_i sont éventuellement vides ou certains a_i sont éventuellement nuls ;
— les A_i ne recouvrent pas nécessairement X tout entier ;
— les $a_i \in \mathbb{R}_+$ ne sont pas nécessairement distincts deux à deux.

Grâce à cette remarque, on peut établir facilement la linéarité (pour des corefficients positifs) et déduire que $(*)$ de la définition 3.1.1 quelle que soit l'écriture de φ.

Lemme 3.1.3: Linéarité pour des coefficients positifs et croissance

1. *Si* $\varphi, \psi \in \mathscr{E}_m^+(X)$ *alors* $\varphi + \psi \in \mathscr{E}_m^+(X)$ *et :* $\int (\varphi + \psi) \,\mathrm{d}\mu = \int \varphi \,\mathrm{d}\mu + \int \psi \,\mathrm{d}\mu.$
2. *Si* $\varphi \in \mathscr{E}_m^+(X)$ $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *alors* $\alpha\varphi \in \mathscr{E}_m^+(X)$ *et :* $\int \alpha\varphi \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int \varphi \,\mathrm{d}\mu.$
3. *Si* $\varphi, \psi \in \mathscr{E}_m^+(X)$ *et si* $\varphi \leq \psi$ *alors :* $\int \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \int \psi \,\mathrm{d}\mu.$

Voir la démonstration (page 77)

Corollaire 3.1.4: L'intégrale ne dépend pas de l'écriture de la fonction étagée

Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathscr{E}_+(X)$, *avec les* $a_i \in \mathbb{R}_+$ *quelconques et les* A_i *mesurables quelconques. Alors :*

$$\int \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{p} a_i \mu(A_i).$$

Lemme 3.1.5: Limite croissante du support d'intégration

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_m^+(X)$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables qui croît vers X. Alors :

$$\lim_{n\to\infty}\uparrow \int_{X_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int \varphi \cdot \mathbb{1}_{X_n} \,\mathrm{d}\mu = \int \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

Voir la démonstration (page 78)

3.1.2 Intégrale pour les fonctions mesurables positives

Définition 3.1.6: Intégrale d'une fonction mesurable positive

Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable ***positive****. On définit l'intégrale de f par rapport à μ :*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int \varphi \,\mathrm{d}\mu : \varphi \in \mathcal{E}t_m^+(X),\ \varphi \leq f \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Si, de plus l'intégrale est ***finie****, on dit que f est* ***intégrable****.*

* * * * * * * * * *

Plus généralement pour $A \in \mathscr{M}$ et f une fonction mesurable positive on définit : $\displaystyle\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu$

Remarques 3.1.7: (À vérifier en exercice)

1. Cette définition donne bien un prolongement de la définition d'intégrale pour les fonctions étagées mesurables positives : c'est une conséquence de la propriété 3. du lemme 3.1.3, à savoir la croissance de l'intégrale, la plus petite fonction étagée supérieure à une fonction étagée φ étant elle-même !
2. Si $A \in \mathscr{M}$ et μ_A est la restriction de μ à $\mathscr{M}_A = \{A \cap B : B \in \mathscr{M}\}$, montrer la cohérence de notation :
$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu_A = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \cdot \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu.$$
3. On remarquera l'analogie entre la définition de l'intégrale d'une fonction mesurable positive et la définition de somme infinie de réels positifs.

Lemme 3.1.8: Croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions mesurables positives (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) telles que $f \leq g$. Alors :

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. *Il suffit de remarquer que $\{\varphi \in \mathcal{E}t_m^+(X) : \varphi \leq f\} \subset \{\varphi \in \mathcal{E}t_m^+(X) : \varphi \leq g\}$, d'utiliser l'inégalité pour les fonctions étagées mesurables positives, puis de passer au sup.* □

Exercice 3.1.9

Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que :

1. $\left(\int f\,\mathrm{d}\mu < +\infty\right) \implies (f < +\infty\ \mu\text{-p.p.})$ (considérer $X_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$) ;
2. $\left(\int f\,\mathrm{d}\mu = 0\right) \implies (f = 0\ \mu\text{-p.p.})$ (considérer $X_n = \left\{x \in X : f(x) \leq \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$).

Le théorème suivant de convergence monotone, dit aussi **théorème de Beppo Levi** joue un rôle fondamental dans la théorie d'intégration de Lebesgue :

Théorème 3.1.10: Théorème de convergence croissante ou de Beppo Levi

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et :

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Voir la démonstration (page 79)

Le fait que l'intégrale soit définie par borne supérieure présente deux inconvénients : d'une part, ce n'est pas maniable pour démontrer ne serait-ce que la linéarité, d'autre part, une suite de fonctions étagées (φ_n), inférieures à f, dont les intégrales convergent vers celle de f, ne veut pas dire que cette suite converge vers f (même simplement).
Grâce au théorème de Beppo Levi ce problème est levé : on peut remplacer le sup par une limite. En effet :

Corollaire 3.1.11: Intégrale vue comme limite (croissante)

Si f est une fonction mesurable positive et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{E}t_m^+(X)$ qui converge simplement vers f (de telles suites existent d'après le théorème d'approximation 2.4.12) alors :

$$\sup\left\{\int \varphi\,\mathrm{d}\mu : \varphi \in \mathcal{E}t_m^+(X),\ \varphi \leq f\right\} = \int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int \varphi_n\,\mathrm{d}\mu.$$

On peut alors transporter la propriété de linéarité de l'intégrale des fonction étagées mesurables positives aux fonctions positives. La démonstration est laissée en exercice.

Proposition 3.1.12: linéarité

1. *Si f et g sont mesurables positives, alors :* $\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu.$
2. *Si f est mesurable positive et α est un réel positif ou nul alors :* $\int \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f\,\mathrm{d}\mu.$

Voici maintenant trois corollaires proches du théorème de convergence croissante de Beppo Levi. Le premier est une adaptation du théorème de convergence croissante au cas décroissant : il nécessite une hypothèse de finitude supplémentaire pour pouvoir l'appliquer.

Corollaire 3.1.13: Théorème de convergence décroissante

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **décroissante** de fonctions mesurables **positives**. Alors $f = \inf_n f_n$ est mesurable **positive** et si f_0 est intégrable alors $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \int f_n\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.*

* * * * * * * * * *

On rappelle que f_0 est intégrable signifie que $\displaystyle\int f_0\,\mathrm{d}\mu < +\infty$. On peut remplacer f_0 par f_{n_0}.

Voir la démonstration (page 80)

Ce deuxième corollaire est une simple application du théorème de convergence croissante au cas des séries de fonctions positives.

Corollaire 3.1.14: Théorème d'interversion de $\int$ et $\sum$

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables **positives**. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable positive et :*

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. *Soit $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives et $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. On applique le théorème de convergence croissante.* □

Enfin, pour le cas d'une suite de fonctions positives qui n'est pas monotone, les théorèmes de convergence croissante et décroissante ne s'appliquent plus. Cependant si on remplace la limite par la « limite inf » on revient à une suite croissante :

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow} \inf_{p\geq n} f_p.$$

L'application du théorème de convergence croissante pour une « limite inf » donne le lemme de Fatou (ou Fatou-Lebesgue) suivant.

Corollaire 3.1.15: Lemme de Fatou-Lebesgue

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf_n f_n$ est mesurable positive et :

$$\int \liminf_n f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Voir la démonstration (page 81)

3.2 Intégrale de Lebesgue - Cas général.

Passons maintenant aux fonctions réelles non nécessairement positives, ou aux fonctions à valeurs complexes. La façon de procéder ressemble fortement au cas des familles sommables de nombres réels ou de nombres complexes : dans le cas réel, on sépare les termes positifs des termes négatifs (dans le cas complexe, on sépare parties réelle et complexe pour se ramener au cas réel).

Dans ce paragraphe les fonctions sont définies sur $(X, \mathscr{M}, \mu)$ à valeurs réelles ou complexes.
On décompose $f : X \to \mathbb{R}$ en :

$$f^+ = \sup(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \sup(-f, 0). \qquad \text{On a :} \quad f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-.$$

On rappelle que : $(f$ est mesurable$) \iff (f^+$ et f^- sont mesurables$)$.
Dans le cas complexe, une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable si ses parties réelle et imaginaire le sont.
On rappelle également qu'une fonction mesurable positive est **intégrable** si son intégrale est **finie**. Dans ce cas, la fonction elle-même est -p.p. finie (cf. exercice 3.1.9). On ne considérera donc que des fonctions prenant des valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au lieu de $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\overline{\mathbb{C}}$.

Lemme 3.2.1: Absolue intégrabilité

1. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors :*

$$(|f| \text{ est intégrable}) \iff (f^+ \text{ et } f^- \text{ sont intégrables})$$

2. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Alors :*

$$(|f| \text{ est intégrable}) \iff (|\mathrm{Re} f| \text{ et } |\mathrm{Im} f| \text{ sont intégrables})$$

Démonstration.

Dans $\mathbb{R}$ $\quad (\implies) : f^+ \leq |f|$ *et* $f^- \leq |f| \qquad (\Longleftarrow) : f^+ + f^- = |f|$.

Dans $\mathbb{C}$ $\quad (\implies) : |\mathrm{Re} f| \leq |f|$ *et* $|\mathrm{Im} f| \leq |f| \qquad (\Longleftarrow) : |f| \leq |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f|$.

□

Définition 3.2.2: Intégrabilité et intégrale

1. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est* ***intégrable*** *si et seulement si $|f|$ est intégrable. Si c'est le cas, on définit l'intégrale de f par rapport à μ :*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) := \int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$$

2. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On dit que f est* ***intégrable*** *si et seulement si $|f|$ est intégrable. Si c'est le cas, on définit l'intégrale de f par rapport à μ :*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int \mathrm{Re} f \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int \mathrm{Im} f \,\mathrm{d}\mu.$$

* * * * * * * * * *

Plus généralement, si $A \in \mathscr{M}$ et f est intégrable, alors $f.\mathbb{1}_A$ aussi et on pose : $\displaystyle\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int f.\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$

Remarque 3.2.3

Si $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable, alors par définition

$$\mathrm{Re}\left(\int f\,\mathrm{d}\mu\right) = \int \mathrm{Re}\, f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\int f\,\mathrm{d}\mu\right) = \int \mathrm{Im}\, f\,\mathrm{d}\mu.$$

Critère d'intégrabilité

Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable et s'il existe une fonction intégrable positive g qui domine f μ-p.p. (c'est à dire $|f(x)| \leq g(x)$ pour μ-p.t. $x \in X$) alors f est intégrable.

Proposition 3.2.4: linéarité et croissance

1. ***L'intégrale est linéaire.***
Si f et g sont intégrables réelles (ou complexes), et α, β sont des réels (ou complexes) alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable et : $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int g\,\mathrm{d}\mu.$
2. ***L'intégrale est croissante.***
Si f et g sont intégrables réelles et si $f \leq g$ alors : $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu \leq \int g\,\mathrm{d}\mu.$
3. *Si f est intégrable réelle (ou complexe) alors :* $\displaystyle\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f|\,\mathrm{d}\mu.$
4. *Si f et g sont intégrables réelles (ou complexes) et si $f = g$ μ-p.p. alors :* $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathrm{d}\mu.$

Démonstration. *On utilise la décomposition $f = f^+ + f^-$ dans le cas réel et $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)$ dans le cas complexe. Tout provient alors du cas des fonctions positives.* □

Nota Bene

On note $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{M}, \mu)$ $\big(\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathscr{M}, \mu)\big)$ ou simplement $\mathscr{L}^1(\mu)$ $\big(\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)\big)$ l'espace des fonctions réelles (complexes) intégrables. La proposition 3.2.4 nous dit que $\mathscr{L}^1(\mu)$ est un espace vectoriel et que $f \mapsto \|f\|_1 := \displaystyle\int |f|\,\mathrm{d}\mu$ est une **semi-norme** sur $\mathscr{L}^1(\mu)$:

— homogénéité : $\displaystyle\int |\lambda f|\,\mathrm{d}\mu = |\lambda| \int |f|\,\mathrm{d}\mu$;

— inégalité triangulaire : $\displaystyle\int |f + g|\,\mathrm{d}\mu \leq \int |f|\,\mathrm{d}\mu + \int |g|\,\mathrm{d}\mu.$

On n'a pas l'axiome de séparation :

$$(\|f\|_1 = 0) \not\Rightarrow (f = 0) \qquad \text{mais presque} \qquad \left(\int |f| \,\mathrm{d}\mu = 0\right) \implies (f = 0 \ \mu\text{-p.p. }).$$

Pour avoir une norme, il faut considérer l'espace vectoriel quotient $L^1(\mu) = \mathscr{L}^1(\mu)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence $f \sim g$ si $f - g = 0$ μ-p.p.

Remarque 3.2.5

Plus généralement, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathscr{L}^p(\mu)$ l'espace des fonctions mesurables $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \to \mathbb{R}$ telle que $|f|^p$ est intégrable, et $L^p(\mu)$ son quotient modulo la relation d'égalité μ-p.p. Ce quotient est un espace normé pour la norme $f \mapsto \|f\|_p = \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$.
Dans le cas où $p = 2$, la norme $\|\cdot\|_2$ est même euclidienne pour le produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \int fg \,\mathrm{d}\mu$.

3.3 Exemples d'intégrations.

3.3.1 Intégration par rapport à une mesure discrète

Dans ce paragraphe, X est un ensemble quelconque muni de la tribu $\mathscr{P}(X)$ de ses parties. En effet les mesures sont construites à partir d'un ensemble au plus dénombrable de mesures de Dirac, qui sont définies sur $\mathscr{P}(X)$. Par voie de conséquence, toute fonction de X dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$) est mesurable.

Commençons par regarder le cas de l'intégration par rapport à une mesure de Dirac.

Proposition 3.3.1: Intégration par rapport à une mesure de Dirac

Soit $a \in X$, δ_a la mesure de Dirac en a. Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est intégrable par rapport à δ_a si et seulement si $f(a) \in \mathbb{R}$ et dans ce cas

$$\int f \,\mathrm{d}\delta_a = f(a).$$

Proposition 3.3.2: Mesure discète

Soit I un ensemble au plus dénombrable, $(a_i)_{i\in I}$ une famille de points de X et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Pour chaque $i \in I$, on note δ_{a_i} la mesure de Dirac en a_i. L'application :

$$\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \delta_{a_i} : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad A \mapsto \mu(A) = \textstyle\sum_{i\in I} \alpha_i \delta_{a_i}(A)$$

est une mesure sur $(X, \mathscr{P}(X))$. ***Une mesure de ce type est qualifiée de discrète****.*

Proposition 3.3.3: Intégration par rapport à une mesure discrète

Soit X un espace muni de la tribu de ses parties $\mathscr{P}(X)$. Soit $\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_{a_i}$ une mesure discrète sur X. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors

$$\Big(f \text{ est intégrable par rapport à } \mu\Big) \iff \Big(\sum_{i \in I} \alpha_i f(a_i) \text{ est sommable}\Big)$$

et si f est intégrable, alors $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i f(a)$.

Les propositions ci-dessus sont laissées en exercice. Pour les propositions 3.3.1 et 3.3.3, on montre tout d'abord le résultat pour les indicatrices, puis les fonctions étagées positives, puis les fonctions positives et enfin les fonctions intégrables (remarque : comme on a pris $\mathscr{P}(X)$ comme tribu,toute fonction est mesurable).

3.3.2 Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue

Proposition 3.3.4: Lien avec l'intégrale de Riemann

Soit $[a;b]$ un segment (i.e. un intervalle fermé borné – ou encore un intervalle compact) de $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. *Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ alors f est λ-mesurable pour la tribu complétée de Lebesgue (et donc λ-intégrable puisque borné) et les intégrales coïncident :*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

2. *La fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ si et seulement si elle est presque partout continue (autrement dit l'ensemble des points de continuité de f est de mesure nulle).*

Voir la démonstration (page 82)

Remarques 3.3.5

1. **La réciproque de 1. est fausse** : exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.
2. Une fonction intégrable au sens de Riemann peut ne pas être borélienne : elle est toujours mesurable **pour la tribu de Lebesgue** $\widehat{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$, complétée de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure λ (cf. exercice 2.3.15), mais pas forcément pour la tribu des boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. En d'autres termes, une fonction localement intégrable au sens de Riemann est λ-p.p. égale à une fonction borélienne, mais peut ne pas être borélienne (un contre-exemple classique consiste à prendre la fonction $\mathbb{1}_N$ où N est sous-ensemble non borélien de l'ensemble triadique de Cantor).

3. Dans la partie 2, dire que f est presque partout continue ne veut pas dire que f est presque partout égale à une fonction continue sur $[a;b]$: par exemple la fonction de Heavyside $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est continue sur $[-1;0[\cup]0;1]$ (sur $\mathbb{R}^*$) mais ne pourra jamais être égale à une fonction continue sur $[-1;1]$ (sur $\mathbb{R}$) !
4. **Cas des fonctions intégrables de Riemann généralisées**.
Une fonction est dite **localement Riemann-intégrable** sur un intervalle généralisé I si elle est Riemann-intégrable sur tout segment.
Une fonction est parfois dite **intégrable au sens de Riemann généralisé** sur I si elle est localement intégrable au sens de Riemann (*i.e.* intégrable au sens de Riemann sur tout segment $[a;b]$ de I) et s'il y a **absolue convergence de l'intégrale impropre** sur I. On a le résultat suivant :

> Pour une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur un intervalle de $\mathbb{R}$, l'absolue convergence de l'intégrale impropre équivaut à l'intégrabilité au sens de Lebesgue.

De plus le théorème de convergence dominée (à venir) assure la coïncidence entre les deux intégrales.

Dans les cas d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur un intervalle $[a;b]$ ou $]a;b[$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$, on utilisera indifféremment les deux notations

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

On peut transposer les résultats classiques des fonctions intégrables au sens de Riemann généralisé au cas de l'intégrale de Lebesgue : par exemple, les règles de Riemann restent valables, le lien entre primitive et intégrale pour une fonction continue...

Règles de Riemann.
— Soit $a > 0$. Si $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ est mesurable, et si $|f(t)| \leq \frac{M}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ sur $[a;+\infty[$, alors f est intégrable sur $[a;+\infty[$.
— Soit $a > 0$. Si $f :]0;a] \to \mathbb{R}$ est mesurable, et si $|f(t)| \leq \frac{M}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$ sur $]0;a]$, alors f est intégrable sur $]0;a]$.

Théorème fondamental de l'analyse. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur I. Pour tout $a \in I$, la fonction

$$x \mapsto F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I (l'unique qui s'annule en a) : elle est dérivable sur I de dérivée f.

Intégration par parties. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $F, G : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe

$\mathscr{C}^1$ sur I. Soit $[a;b] \subset I$. on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_{[a;b]} F'G \,\mathrm{d}\lambda = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a;b]} FG' \,\mathrm{d}\lambda.$$

Remarque : si F et G ne sont que dérivables, alors F', G' sont mesurables sur I – exercice – mais il faut rajouter l'hypothèse $F'G$ intégrable sur $[a;b]$. Dans ce cas, FG' est aussi intégrable sur $[a;b]$ et la formule d'intégration par parties est encore vraie.

5. **Attention** : une fonction du type $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est intégrable au sens de Riemann sur $\mathbb{R}_+$ bien que l'intégrale ait une limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{mais} \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty.$$

Le même problème se retrouve avec l'intégrale de Lebesgue. On parle de semi-intégrabilité.

3.3.3 Mesures à densité

Proposition 3.3.6: Mesure à densité

Soit $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Pour tout $A \in \mathscr{M}$ on pose :

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu$$

*Alors ν est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ qui satisfait la propriété dite d'**absolue continuité** :*

$$\forall A \in \mathscr{M} \qquad \big(\mu(A) = 0\big) \implies \big(\nu(A) = 0\big).$$

Cette mesure est finie si et seulement si f est intégrable par rapport à μ.

*On note $\nu = f\mu$ et on dit que f est la **densité** de ν par rapport à μ. La densité f s'appelle aussi la **dérivée de Radon-Nikodym** de ν par rapport à μ, notée*

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}.$$

Proposition 3.3.7: Intégration par rapport à une mesure à densité

Soit $f : (X, \mathscr{M}, \mu) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive et $\nu = f\mu$. Une fonction $g : (X, \mathscr{M}) \to \mathbb{R}$ est intégrables par rapport à ν si et seulement fg est intégrables par rapport à μ et dans ce cas :

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \int fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Ces deux propositions sont laissées en exercice. Pour la proposition 3.3.7, on procède comme dans le paragraphe 3.3.1 : montre tout d'abord le résultat pour les fonctions étagées mesurables positives, puis les fonctions mesurables positives et enfin les fonctions intégrables.

Les démonstrations du chapitre 3

Lemme: Linéarité pour des coefficients positifs et croissance

On a les propriétés suivantes :

1. *Si φ et ψ sont étagées mesurables positives, alors :* $\displaystyle\int(\varphi+\psi)\,\mathrm{d}\mu=\int\varphi\,\mathrm{d}\mu+\int\psi\,\mathrm{d}\mu$.
2. *Si φ est étagée mesurable positive et α est un réel positif ou nul alors :* $\displaystyle\int\alpha\varphi\,\mathrm{d}\mu=\alpha\int\varphi\,\mathrm{d}\mu$.
3. *Si φ et ψ sont étagées mesurables positives et si $\varphi\leq\psi$ alors :* $\displaystyle\int\varphi\,\mathrm{d}\mu\leq\int\psi\,\mathrm{d}\mu$.

Démonstration. *Retour page 66*

1. *Considérons les décompositions canoniques* $\varphi=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbb{1}_{A_i}$ *et* $\psi=\sum_{j=1}^{q}b_j\mathbb{1}_{B_j}$ *de φ et ψ. Comme $(A_i)_{1\leq i\leq p}$ $(B_j)_{1\leq j\leq q}$ sont des partitions de X,*

$$1=\sum_{i=1}^{p}\mathbb{1}_{A_i}=\sum_{j=1}^{q}\mathbb{1}_{B_j}\qquad\text{et donc}\qquad\varphi+\psi=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

Les $A_i\cap B_j$ étant disjoints deux à deux, en vertu de la remarque 3.1.2 on obtient :

$$\begin{aligned}\int(\varphi+\psi)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{q}\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{q}b_j\sum_{i=1}^{p}\mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{p}a_i\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_j\mu(B_j)=\int\varphi\,\mathrm{d}\mu+\int\psi\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

2. *Evident.*
3. *Conséquence de 1. et de la positivité de l'intégrale : on pose $\psi=\varphi+(\psi-\varphi)$.*

$\square$

Lemme: Limite croissance du support d'intégration

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_m^+(X)$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'ensembles mesurables qui croît vers* X. *Alors :*

$$\lim_{n\to\infty}\uparrow \int_{X_n} \varphi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int \varphi \cdot \mathbb{1}_{X_n} \, \mathrm{d}\mu = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Retour page 67

C'est une conséquence directe de la propriété de continuité des mesures par limite croissante.

Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{1}_{A_i}$. *Alors :* $\varphi \cdot \mathbb{1}_{X_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{1}_{A_i \cap X_n}$. *On a alors :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\uparrow \int \varphi \cdot \mathbb{1}_{X_n} \, \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty}\uparrow \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i \cap X_n) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \lim_{n\to\infty}\uparrow \mu(A_i \cap X_n) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

□

Théorème: Théorème de convergence croissante ou de Beppo Levi

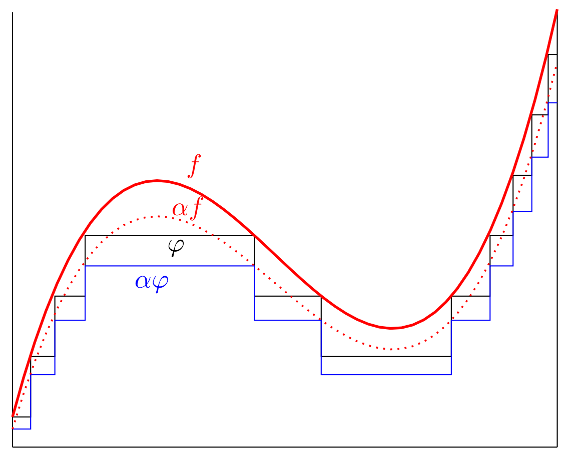
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et :

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Retour page 68

En vertu du lemme 3.1.8, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers f, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int f \, \mathrm{d}\mu.$$



Réciproquement, soit $\varphi \leq f$ une fonction étagée mesurable positive.
On "détache" φ de f en multipliant φ par un facteur $\alpha \in]0;1[$ arbitrairement proche de 1, afin de pouvoir "presque" intercaler les f_n entre $\alpha\varphi$ et f. Montrons que pour un tel α on a alors

$$\int \alpha\varphi \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Définissons le lieu X_n où on peut intercaler f_n :

$$X_n = \{x \in X : \alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f(x)\} \in \mathscr{M}$$

Chaque X_n peut ne pas être X en entier, mais la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers X :

$$\left(f_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f\right) \implies \left(X = \lim_{n\to\infty}\uparrow X_n\right)$$

En effet, si $x \in X_n$ alors $\alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ donc $x \in X_{n+1}$ donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha\varphi(x) \leq \alpha f(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$, donc $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. D'autre part, par définition de X_n

$$\alpha \int \varphi \cdot \mathbb{1}_{X_n} \, \mathrm{d}\mu \leq \int f_n \, \mathrm{d}\mu$$

En utilisant le lemme 3.1.5 on obtient donc :

$$\alpha \int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \alpha \lim_{n\to\infty}\uparrow \int \varphi \mathbb{1}_{X_n} \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\alpha < 1$ et toute fonction $\varphi \in \mathscr{E}_m^+(X)$ telle que $\varphi \leq f$. En passant à la limite lorsque α tend vers 1, puis à la borne sup sur les fonctions étagées $\varphi \leq f$ on a :

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int \varphi \, \mathrm{d}\mu : \varphi \in \mathcal{E}t_m^+(X) : \varphi \leq f\right\} \leq \lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n \, \mathrm{d}\mu$$

□

Corollaire: Théorème de convergence décroissante

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***décroissante*** *de fonctions mesurables* ***positives****. Alors $f = \inf_n f_n$ est mesurable positive et si f_0 est intégrable alors*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \int f_n \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

* * * * * * * * * *

On rappelle que f_0 est intégrable signifie que $\int f_0 \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. On peut remplacer f_0 par f_{n_0}.

Démonstration. *Retour page 69*
Comme $f \le f_n \le f_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int f \,\mathrm{d}\mu \le \int f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int f_0 \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Beppo Levi à $g_n = f_0 - f_n \ge 0$; $g_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f_0 - f$ donc :

$$\int f \,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty}{}^{\uparrow} \int g_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int (f_0 - f) \,\mathrm{d}\mu = \int f_0 \,\mathrm{d}\mu$$

la dernière égalité étant une conséquence de la linéarité (proposition 3.1.12). Ainsi

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \Big(\int f_0 \,\mathrm{d}\mu - \int g_n \,\mathrm{d}\mu \Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \Big(\int (f_n + g_n) \,\mathrm{d}\mu - \int g_n \,\mathrm{d}\mu \Big) = \lim_{n\to\infty}{}^{\downarrow} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$$

car $\int (f_n + g_n) \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\mu + \int g_n \,\mathrm{d}\mu$. □

Corollaire: Lemme de Fatou-Lebesgue

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\liminf_n f_n$ est mesurable positive et :

$$\int \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Retour page 69

On a : $\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k = \lim_n^{\uparrow} \inf_{k\geq n} f_k$. *La suite* $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ *est une suite croissante de fonctions mesurables positives. On applique le théorème de convergence croissante de Beppo Levi :*

$$\begin{aligned}
\int \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu &= \int \lim_n^{\uparrow} g_n \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_n^{\uparrow} \int g_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{(Beppo Levi)} \\
&= \lim_n^{\uparrow} \int \inf_{k\geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu \\
\left(\textit{croissance de } \int\right) \qquad &\leq \lim_n^{\uparrow} \inf_{k\geq n} \int f_k \,\mathrm{d}\mu = \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

□

Proposition: Lien avec l'intégrale de Riemann

Soit $[a;b]$ un segment (i.e. un intervalle fermé borné – ou encore un intervalle compact) de $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. *Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ alors f est λ-mesurable pour la tribu complétée de Lebesgue (et donc λ-intégrable puisque borné) et les intégrales coïncident :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

2. *La fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ si et seulement si elle est presque partout continue (autrement dit l'ensemble des points de continuité de f est de mesure nulle).*

Démonstration. Retour page 73

Puisque f est bornée, quitte à remplacer f par $f - m$ où m est un minorant de f sur $[a;b]$, on peut supposer f positive.

1. • *Rappelons la définition de l'intégrale de Riemann avec les sommes de Darboux.*
Soit $\sigma = (x_i)_{0\le i\le p}$ une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} < x_p = b$ (on dit que $\delta = \max\{|x_{i+1} - x_i| : 0 \le i \le p\}$ est le pas *de la subdivision, les x_i les points de la subdivision).*
On note :

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$\varphi = \sum_{i=1}^p m_i \mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i[} \qquad \Phi = \sum_{i=1}^p M_i \mathbb{1}_{[x_{i-1},x_i[}$$

Ces deux fonctions en escalier positives sont donc aussi mesurables étagées positives. De plus $0 \le \varphi \le f \le \Phi$ et les sommes de Darboux inférieure $s_\sigma(f)$ et supérieure $S_\sigma(f)$ satisfont :

$$s_\sigma(f) = \sum_{i=1}^p m_i(x_i - x_{i-1}) = \int_{[a,b]} \varphi\,\mathrm{d}\lambda \le \int_{[a,b]} \Phi\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^p M_i(x_i - x_{i-1}) = S_\sigma(f).$$

Dire que f est intégrable au sens de Riemann signifie exactement que

$$\sup\Big\{s_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a;b]\Big\} = \inf\Big\{S_\sigma(f) : \sigma \text{ subdivision de } [a;b]\Big\}$$

et la valeur commune est l'intégrale de Riemann : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

• *Si on considère une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions dont les pas δ_n tendent vers 0, chaque subdivision étant un raffinement de la précédente (obtenue par un procédé de dichotomie par exemple) on obtient deux suites φ_n et Φ_n telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$0 \le \varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f \le \Phi_{n+1} \le \Phi_n$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty}\uparrow \int_{[a,b]} \varphi_n\,\mathrm{d}\lambda \le \lim_{n\to+\infty}\downarrow \int_{[a,b]} \Phi_n\,\mathrm{d}\lambda.$$

Posons $g = \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow}\varphi_n$ *et* $G = \lim_{n\to+\infty}{}^{\downarrow}\Phi_n$. *On a* $g \leq f \leq G$ *et les théorèmes de convergence croissante et décroissante nous disent que* G *et* g ***sont boréliennes*** *et :*

$$\int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty}{}^{\uparrow}\int_{[a,b]}\varphi_n\,\mathrm{d}\lambda \leq \lim_{n\to+\infty}{}^{\downarrow}\int_{[a,b]}\Phi_n\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} G\,\mathrm{d}\lambda.$$

Or f *est intégrable au sens de Riemann si et seulement si l'inégalité ci-dessus est une égalité* $\Big($*et alors la valeur commune est* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)$.
Mais cela équivaut à dire que

$$\int_{[a,b]}(G-g)\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

autrement dit $g = G$ λ-*p.p. et comme* $g \leq f \leq G$, *que* $f = g = G$ λ-*p.p. On en déduit dans ce cas la mesurabilité de* f ***pour la tribu complétée****, et même l'intégrabilité au sens de Lebesgue de* f *pour la mesure de Lebesgue ainsi que l'égalité*

$$\int_{[a,b]} g\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *Cette seconde partie est plus délicate. On conserve les notations de 1 : pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{n+1} \leq \varphi_n \leq g \leq f \leq G \leq \Phi_n \leq \Phi_{n+1}.$$

On note h *et* H *les fonctions définies sur* $[a;b]$ *par :*

$$h(x) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\sup\{f(t) : t\in[a;b]\ |t-x|<\varepsilon\} \quad \text{et} \quad H(x) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\inf\{f(t) : t\in[a;b]\ |t-x|<\varepsilon\}$$

Dire que f *est continue en* x *signifie que* $h(x) = H(x) = f(x)$.

• *Il est facile de voir que* $0 \leq h \leq g \leq f \leq G \leq H$. *En effet, pour tout* $x \in [a;b]$, *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *à partir d'un certain rang* n_ε, *si* $n \geq n_\varepsilon$, *alors* $\delta_n < \varepsilon$ *d'où les inégalités :*

$$\inf\{f(t) : t\in[a;b]\ |t-x|<\varepsilon\} \leq \varphi_n(x) \leq g(x)$$

$$\Phi_n(x) \geq \sup\{f(t) : t\in[a;b]\ |t-x|<\varepsilon\} \geq G(x)$$

et donc en passant à la limite en $\varepsilon\to0^+$ *on a bien* $0 \leq h(x) \leq g(x) \leq f(x) \leq G(x) \leq H(x)$.

• *D'autre part, si on note* $\mathscr{P}$ *l'ensemble des points de toutes les subdivisions* σ_n *(*$\mathscr{P}$ *est dénombrable, donc de mesure nulle) et si* $x \in [a;b] \setminus \mathscr{P}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$x_i^{(n)} < x-\varepsilon < x < x+\varepsilon < x_{i+1}^{(n)}$$

où $x_i^{(n)}$ *et* $x_i^{(n)}$ *sont les deux points successifs de* σ_n *entourant* x *si bien que l'on a les inégalités :*

$$\varphi_n(x) \leq \inf\{f(t) : t\in[a;b]\ |t-x|<\varepsilon\} \leq h(x)$$

$$\sup\{f(t) : t\in[a;b]\ |t-x|<\varepsilon\} \geq \Phi_n(x) \geq H(x)$$

Il s'ensuit que sur $[a;b] \setminus \mathscr{P}$, $0 \leq g \leq h \leq f \leq H \leq G$*. Autrement dit*

$$0 \leq g = h \leq f \leq G = H \ \lambda\text{-p.p.}$$

Si f *est presque partout continue, alors* $h = H$ λ*-p.p. et donc* $g = G$ λ*-p.p. d'où d'après 1,* f *Riemann intégrable. Réciproquement, si* f *Riemann intégrable, alors* $g = G$ λ*-p.p. d'après 1 et donc* $h = H$ λ*-p.p. ce qui signifie que* f *est presque partout continue.*

Cas des fonctions intégrables de Riemann généralisées*.*
Si l'intégrale (au sens de Riemann généralisé) sur $]a;b[$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ *de* $|f|$ *converge, alors pour* (a_n) *une suite qui décroît strictement vers* a *et* (b_n) *une suite qui croît strictement vers* b*, on a* $\lim\limits_{n\to\infty}{}^{\uparrow} \mathbb{1}_{[a_n;b_n]}|f| = |f|$ *et d'après la proposition 3.3.4 ci-dessus on a :*

$$\int_{a_n}^{b_n} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{[a_n,b_n]} |f(x)| \ d\lambda(x) \qquad \text{et} \qquad \int_{a_n}^{b_n} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{[a_n,b_n]} f(x) \ d\lambda(x)$$

Le membre de gauche de la première égalité converge vers l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$*, le membre de droite de la première égalité converge vers* $\displaystyle\int_{[a;b]} |f(x)| \,\mathrm{d}\lambda(x)$ *d'après le théorème de Beppo Levi.*
On en déduit l'intégrabilité de f *au sens de Lebesgue :*

$$\int_{[a_n,b_n]} |f(x)| \ d\lambda(x) = \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

De la seconde égalité, et en appliquant le théorème de convergence dominée du chapitre suivant à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $f_n = \mathbb{1}_{[a_n;b_n]} \cdot f$*, et pour la fonction dominante* $g = |f|$*, on déduit l'égalité*

$$\int_{]a,b[} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a_n;b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t) \,\mathrm{d}t.$$

□

Chapitre 4

Le théorème de convergence dominée

4.0 Rappel des théorèmes de convergence précédents

Pour des suites de fonctions positives, on a vu le théorème de convergence croissante, essentiel dans la construction de l'intégrale, et son corollaire immédiat sur les séries de fonctions positives.

Théorème: Théorème de convergence croissante ou de Beppo Levi

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***croissante*** *de fonctions mesurables* ***positives*** *sur l'espace mesuré $(X,\mathscr{M},\mu)$. Alors $f=\sup\limits_n f_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\uparrow f_n$ est mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

Corollaire: Théorème d'interversion de $\int$ et $\sum$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables ***positives*** *sur l'espace mesuré $(X,\mathscr{M},\mu)$. Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable positive et $\displaystyle\int\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

Le théorème de convergence croissante se décline en un autre corollaire donnant le cas de la convergence décroissante. **Mais pour ce dernier cas, on a besoin d'une hypothèse de domination** : une des fonctions f_{n_0} de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit avoir une intégrale finie, ce qui induit la finitude des intégrales de toutes fonctions les suivantes, puisque f_{n_0} les domine !

Corollaire: Théorème de convergence décroissante

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ***décroissante*** *de fonctions mesurables* ***positives*** *sur $(X,\mathscr{M},\mu)$. Alors la fonction $f=\inf\limits_n f_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\downarrow f_n$ est mesurable* ***positive*** *et s'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que f_{n_0} est intégrable alors $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\downarrow\int f_n\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.*

Afin d'avoir un théorème analogue pour des suites non nécessairement monotones, de fonctions non nécessairement positives, on est tenter d'utiliser les limites inférieure et supérieure qui sont respectivement des limites croissantes et décroissantes :

Nota Bene

On rappelle qu'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$-\infty < \liminf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{p\to+\infty}\uparrow \inf_{n\geq p} u_n = \lim_{p\to+\infty}\downarrow \sup_{n\geq p} u_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}} u_n < +\infty$$

et la valeur commune est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* * * * * * * * * *

La limite inférieure est la plus petite valeur d'adhérence et limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'égalité des deux signifie qu'il y a une unique valeur d'adhérence : la limite de la suite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On a justement vu un corollaire du théorème de Beppo Levi pour les limites inférieures :

Lemme: Fatou-Lebesgue

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables **positives** sur l'espace mesuré $(X\mathscr{M},\mu)$. Alors $\liminf_n f_n$ est mesurable positive et :*

$$\int \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

4.1 Le théorème de convergence dominée

En utilisant judicieusement les remarques du paragraphe précédent, on obtient le théorème suivant, qui suppose uniquement une convergence **simple** :

Théorème 4.1.1: Théorème de convergence dominée de Lebesgue

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X\mathscr{M},\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge **simplement** -p.p. (pour μ) vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction **intégrable** positive $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dite **dominante**, telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad |f_n| \leq g$ -p.p. Alors :*

1. *f et f_n sont intégrables (pour tout $n\in\mathbb{N}$)*
2. *$\lim_n \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$ (autrement dit $\|f-f_n\|_1 \to 0$ lorsque $n\to+\infty$)*
3. *$\lim_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

Voir la démonstration (page 89)

Corollaire 4.1.2: Séries d'intégrales

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré* $(X\mathscr{M},\mu)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Si* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ *alors les fonctions* u_n, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ *et* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ *sont intégrables et*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\,\mathrm{d}\mu$$

Voir la démonstration (page 91)

4.2 Conséquences du théorème de convergence dominée

Le théorème de convergence dominée concerne des suites de fonctions, l'indice est un paramètre entier. La continuité étant équivalente à la continuité séquentielle dans $\mathbb{R}$ ou dans un espace métrique, on généralise facilement le théorème de convergence dominée à la continuité des intégrales à paramètre.

Théorème 4.2.1: Théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Soient $(X,\mathscr{M},\mu)$ *un espace mesuré,* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $a\in I$ *et* $f : X\times I\to\mathbb{R}$ *une fonction* ($x\in X$ *est la variable d'intégration et* $t\in I$ *le paramètre réel). On assimile cette fonction* f *à la famille* $(f_t)_{t\in I}$ *à un paramètre en posant* $f(x,t)=f_t(x)$*. On suppose que* f *satisfait les hypothèses :*

1. ***Continuité par rapport au paramètre*** t *: pour* (μ) *presque tout* $x\in X$,

$$\begin{array}{rcl} f(x,\cdot): I & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est continue en } a\,;$$

2. ***Mesurabilité par rapport à la variable d'intégration*** x *: pour tout* $t\in I$,

$$\begin{array}{rcl} f(\cdot,t)=f_t: X & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est mesurable sur } X\,;$$

3. ***Domination*** *: il existe une fonction* $g : X\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *intégrable telle que :* $\forall t\in I\ |f_t|\le g$ *-p.p.*

Alors f_t *est intégrable pour tout* $t\in I$ *et* $F(t)=\displaystyle\int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ *est continue en* a.

* * * * * * * * * *

- *On a un résultat analogue avec la continuité à droite ou à gauche ;*
- *On peut tout à fait généraliser à la continuité dans un espace métrique : il suffit de remplacer* I *par un espace métrique, ou un ouvert d'un espace métrique.*

Exercice 4.2.2

Soit fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. On pose :
$$F(t)=\int_{[a,t]} f\,\mathrm{d}\lambda=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que c'est encore vrai en remplaçant λ par une mesure μ telle que $\mu(\{x\})=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Théorème 4.2.3: Théorème de dérivation (global) des intégrales à paramètre

Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X\times I\to\mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. *pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(x,t)$ est dérivable par rapport à t de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$*
2. *pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)=f_t$ est* ***intégrable***
3. *il existe une fonction $g : X\to\mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $t\in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)\right|\le g$ -p.p. .*

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ est intégrable pour tout $t\in I$, $F(t)=\displaystyle\int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable en t et :
$$F'(t)=\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Voir la démonstration (page 93)

Remarque 4.2.4

1. Il existe une version locale (dérivée en un point t_0) en demandant uniquement l'exitence de $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ et en remplaçant la condition de domination par
$$\text{pour presque tout } x\in X,\qquad |f(x,t)-f(x,t)|\le g(x)|t-t_0|.$$
2. On peut généraliser aux dérivées d'ordre supérieur (exercice).
3. On peut aussi généraliser en remplaçant I par un ouvert de $\mathbb{R}^p$ en utilisant les dérivées directionnelles notamment les dérivées partielles.
4. Le corollaire 4.1.2 permet quant à lui de traiter le cas des fonctions analytiques (c'est à dire localement développables en séries entières)

Les démonstrations du chapitre 4

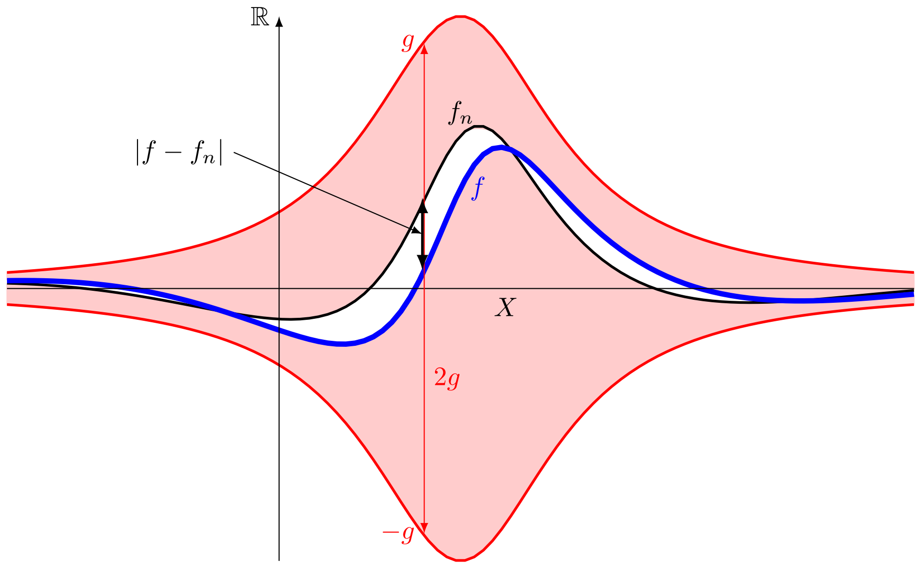
Théorème: Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X\mathscr{M},\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge ***simplement*** *-p.p. (pour μ) vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonction* ***intégrable*** *positive g, dite* **dominante**, *telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g$ -p.p. . Alors :*

1. *f et f_n sont intégrables (pour tout $n \in \mathbb{N}$)*
2. $\lim\limits_n \displaystyle\int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$
3. $\lim\limits_n \displaystyle\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$

Démonstration. *Retour page 86*

1. *Dans un premier temps, on suppose que pour tout $x \in X$: $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$. On a alors $|f(x)| \leq g(x)$. Notons $f_\infty = f$.*



L'idée de la démonstration est la suivante : imaginons le cas où $X = \mathbb{R}$ et $\mu = \lambda$. La surface entre les courbes représentant $-g$ et g est finie, égale à $S = \displaystyle\int 2g \,\mathrm{d}\mu$. Lorsque n tend vers $+\infty$, f_n se rapproche de f, et donc la surface colorée se rapproche de la surface S, mais pas forcément de façon croissante. Aussi, pour palier à ce manque de croissance, on va appliquer le lemme de Fatou-Lebesgue qui utilise la « limite inf » plutôt que la limite

On a les propriétés suivantes :

- *f est mesurable comme limite de fonctions mesurables*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,*

$$(|f_n| \leq g) \Longrightarrow \left(\int |f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right)$$

  donc f_n est intégrable. En particulier, pour $n = \infty$, f est intégrable.
- *On pose $h_n = 2g - |f - f_n|$. On a :*

$$h_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \liminf_n h_n = 2g - \limsup_n |f - f_n| = 2g - \lim_n |f - f_n| = 2g$$

- *En appliquant le lemme de Fatou à (h_n) on obtient :*

$$\int 2g \,\mathrm{d}\mu = \int \liminf_n h_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int h_n \,\mathrm{d}\mu = \int 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

  Comme $\int 2g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, on trouve : $\limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq 0$ donc

$$\limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- *Enfin : $0 \leq \left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \quad$ donc $\quad \lim_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

2. *Soient N_n un ensemble de mesure nulle en dehors duquel g majore $|f_n|$, et N un ensemble de mesure nulle en dehors duquel $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Alors $\mu\Big(N \cup \bigcup_n N_n\Big) = 0$.*

   On note $U = \Big(N \cup \bigcup_n N_n\Big)^c$ et on remplace f_n par $\tilde{f}_n = f_n.\mathbb{1}_U$ et f par $\tilde{f} = f.\mathbb{1}_U$. On a :

   $$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \tilde{f}_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \int f \,\mathrm{d}\mu = \int \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu \qquad \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \int |\tilde{f} - \tilde{f}_n| \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Corollaire: Séries d'intégrales

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré* $(X\mathscr{M},\mu)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Si* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ *alors les fonctions* u_n, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ *et* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ *sont intégrables et*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X u_n\,\mathrm{d}\mu$$

Démonstration. *Retour page 87*
On pose $g = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$, $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$ *et* $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. *Alors l'hypothèse et le théorème de Beppo Levi nous disent que* g *est positive intégrable d'intégrale*

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X |u_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

De plus g *domine la famille* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |f_n| \le g.$$

On en déduit que f *est définie presque partout (la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ *est presque partout finie et donc la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ *est presque partout absolument convergente). Le théorème de convergence dominée s'applique, d'où la conclusion du corollaire.* □

Théorème: Théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction ($x \in X$ est la variable d'intégration et $t \in I$ le paramètre réel). On assimile cette fonction f à la famille $(f_t)_{t\in I}$ à un paramètre en posant $f(x,t) = f_t(x)$. On suppose que f satisfait les hypothèses :

1. ***Continuité par rapport au paramètre** t : pour (μ) presque tout $x \in X$,*

$$\begin{array}{rcl} f(x,\cdot) : I & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est continue en } a\,;$$

2. ***Mesurabilité par rapport à la variable d'intégration** x : pour tout $t \in I$,*

$$\begin{array}{rcl} f(\cdot,t) = f_t : X & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,t) \end{array} \quad \text{est mesurable sur } X\,;$$

3. ***Domination** : il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que : $\forall t \in I\ |f_t| \leq g$ -p.p.*

Alors f_t est intégrable pour tout $t \in I$ et $F(t) = \displaystyle\int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est continue en a.

* * * * * * * * * *

- *On a un résultat analogue avec la continuité à droite ou à gauche ;*
- *On peut tout à fait généraliser à la continuité dans un espace métrique : il suffit de remplacer I par un espace métrique, ou un ouvert d'un espace métrique.*

Démonstration. *Retour page 87*
L'intégrabilité de f_t est évidente. Ensuite, dire que F est continue en $a \in I$ revient à dire que pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $\big(F(t_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$. Il suffit donc d'appliquer le théorème de convergence dominée aux suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $g_n = f(\cdot, t_n)$. En effet, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, on déduit de la continuité de $f(x,\cdot)$ en a que $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ (pour presque tout $x \in X$). En outre pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$ on a $|g_n(x)| \leq g(x)$. Comme g est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int f(x,t_n)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x,a)\,\mathrm{d}\mu(x) = F(a).$$

□

Théorème: Théorème de dérivation (global) des intégrales à paramètre

Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. *pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable par rapport à t de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$*
2. *pour tout $t \in I$, $f(\cdot,t) = f_t$ est* ***intégrable***
3. *il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $t \in I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)\right| \leq g$ -p.p. .*

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t)$ est intégrable pour tout $t \in I$, $F(t) = \displaystyle\int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable en t et :

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Démonstration. *Retour page 88*

L'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ sur X pour tout $t \in I$ est évidente. Pour la dérivée de F en $a \in I$, on applique le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = \frac{f(\cdot,t_n)-f(\cdot,a)}{t_n-a}$ où $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers a comme pour le corollaire 4.2.1. En effet, pour presque tout $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,a)$ et d'après le théorème des accroissements finis, pour presque tout $x \in X$,

$$|g_n(x)| = \left|\frac{f(x,t_n)-f(x,a)}{t_n-a}\right| \leq \sup_{t\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$$

On déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(a)}{t_n-a} = \lim_{n\to+\infty}\int_X g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,a)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

□

Chapitre 5

Le théorème de Fubini

5.1 Produit de mesures σ-finies

Rappel : mesure σ-finie

Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ est σ-finie s'il existe une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}$ telle que : $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} X_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(X_n) < +\infty$.

Définition 5.1.1: Tribu produit

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2)$ deux espaces mesurables. La tribu produit $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$ sur $X_1 \times X_2$ est définie par : $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2 := \sigma(\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2) = \sigma\big(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathscr{M}_1 \quad A_2 \in \mathscr{M}_2\}\big)$.

Remarque 5.1.2

1. La définition de la tribu produit fait que les projections $\pi_k : (X_1 \times X_2, \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2) \to (X_k, \mathscr{M}_k)$ définies par $\pi_1(x_1, x_2) = x_k$ pour $k \in \{1, 2\}$ sont mesurables : en effet, pour $k = 1$ par exemple, si $A \in \mathscr{M}_1$,
$$\pi_1^{-1}(A) = A \times X_2 \in \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2 \subset \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2.$$
2. Plus précisément, la tribu $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$ est la plus petite tribu rendant π_1 et π_2 simultanément mesurables : en effet pour tout $A_1 \in \mathscr{M}_1$ et tout $A_2 \in \mathscr{M}_2$ on a :
$$\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2) = A_1 \times A_2$$
donc si $\pi_1^{-1}(A_1)$ et $\pi_1^{-1}(A_1)$ sont mesurables, alors $A_1 \times A_2$ doit être mesurable et donc la tribu sur $X_1 \times X_2$ doit contenir $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$.

Lemme 5.1.3: Mesure de sections horizontales et verticales

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies. On munit $X_1 \times X_2$ de la tribu produit $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$. Soit $E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$.

1. *Pour tout $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$, les "sections horizontales et verticales"*

$$H_{a_2}(E) = \{x \in X_1 : (x, a_2) \in E\} \qquad \text{et} \qquad V_{a_1}(E) = \{y \in X_2 : (a_1, y) \in E\}$$

   sont mesurables dans $(X_1, \mathscr{M}_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2)$ respectivement ;

2. *les applications "mesures de sections horizontales et verticales"*

$$v_E : \begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ a_1 & \longmapsto & \mu_2\big(V_{a_1}(E)\big) \end{array} \qquad \text{et} \qquad h_E : \begin{array}{ccc} X_2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ a_2 & \longmapsto & \mu_1\big(H_{a_2}(E)\big) \end{array}$$

   sont mesurables.

Voir la démonstration (page 107)

Théorème 5.1.4: Mesure produit

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies. On munit $X_1 \times X_2$ de la tribu produit $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$.

1. *Il existe une unique mesure μ telle que*

$$\forall A_1 \times A_2 \in \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2 \qquad \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

   Cette mesure est également σ-finie et on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$.

2. *Pour tout $E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$*

$$\begin{aligned} \mu(E) = \int_{X_1 \times X_2} \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \mathbb{1}_E(x, y) \, \mathrm{d}\mu_2(y) \right) \mathrm{d}\mu_1(x) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \mathbb{1}_E(x, y) \, \mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_2(y). \end{aligned}$$

Voir la démonstration (page 108)

Remarque 5.1.5

La tribu produit $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^q)$ sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$ coïncide avec la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{p+q})$. De plus grâce au théorème d'unicité des mesures dans le cas σ-fini, on voit que $\lambda_p \otimes \lambda_q = \lambda_{p+q}$, puisque ces deux mesures coïncident sur les éléments $A \times B \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^p) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^q)$ tels que $\lambda_p(A) < +\infty$ et $\lambda_q(B) < +\infty$, qui forment un π-système générateur.

5.2 Le théorème de Fubini pour les intégrales

Théorème 5.2.1: Théorème de Fubini-Tonelli.

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies. Soit $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. On regarde f comme fonction de deux variables $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Alors :

1. *pour presque tout $a_1 \in X_1$ et presque tout $a_2 \in X_2$, les fonctions*

$$f(\cdot, a_2) : \begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x_1 & \longmapsto & f(x_1, a_2) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f(a_1, \cdot) : \begin{array}{ccc} X_2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ x_2 & \longmapsto & f(a_1, x_2) \end{array}$$

   sont mesurables positives sur X_1 et X_2 respectivement ;

2. *les fonctions $F_1 : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et $F_2 : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définies par :*

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \qquad \text{et} \qquad F_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

   sont mesurables positives sur X_1 et X_2 respectivement ;

3. *On a égalité des trois intégrales :*

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_1} F_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} F_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

   autrement dit :

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Voir la démonstration (page 110)

Remarque 5.2.2

Compte tenu du lien entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann sur $\mathbb{R}$ (proposition 3.3.4 et remarque 3.3.5) et en vertu du théorème de Fubini-Tonelli (et plus loin du théorème de Fubini) on note souvent indifféremment

- pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_{[a;b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad \int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\lambda_3(x, y, z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z...$

Exemples 5.2.3

Le théorème de Fubini-Tonelli permet de calculer des aires (dans $\mathbb{R}^2$) et volumes (dans $\mathbb{R}^3$) d'ensembles mesurables.

1. Si $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, en découpant E en tranches verticales $E = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} E_x$, c'est à dire $\mathbb{1}_E(x,y) = \mathbb{1}_{E_x}(y)$ on a :

$$\lambda_2(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_E(x,y)\ d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{E_x}(y)\ d\lambda_1(y)\Big)\ d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(E_x)\ d\lambda_1(x).$$

Donnons un exemple du calcul de l'aire du domaine bordée par une ellipse.
Soit $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\big\}$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ bordé par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Pour calculer sa surface, on coupe par exemple par tranches verticales :

$$E_x = \Big\{y \in \mathbb{R} : |y| \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\Big\} = \Big[-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\Big] \quad x \in [-a;a]$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2(E) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_E(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{E_x}(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a;a]}(x) 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\ d\theta = 2ab\int_0^{\pi/2} (\cos(2\theta)+1)\ d\theta \\
&= \pi\, ab
\end{aligned}$$

2. De même si $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$, $E = \bigcup_{z\in\mathbb{R}} E^z$, i.e. $\mathbb{1}_E(x,y,z) = \mathbb{1}_{E^z}(x,y)$ on a :

$$\lambda_3(E) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_E(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{E^z}(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\Big)\,\mathrm{d}\lambda_1(z) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(E^z)\,\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Volume de l'ellipsoïde $E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\Big\}$. Pour chaque $z \in [-c;c]$, notons E^z l'ellipse de $\mathbb{R}^2$: $E^z = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}\Big\}$, de surface $\lambda_E(D_z) = \pi ab\big(1-\frac{z^2}{c^2}\big)$ d'après 1. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda_3(E) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_E(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y dz \\
&= \int_{-c}^{c} \Big(\iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{E_z}(x,y) dx\,\mathrm{d}y\Big) dz \\
&= \int_{-c}^{c} \pi ab\Big(1-\frac{z^2}{c^2}\Big) dz \ = \ \frac{4}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

Théorème 5.2.4: Théorème de Fubini.

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies. Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ une fonction ***intégrable*** *sur $X_1 \times X_2$. Alors :*

- *pour presque tout $x_2 \in X_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur X_1 ;*
- *pour presque tout $x_1 \in X_1$, la fonction $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur X_2 ;*
- *les fonctions :*

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \quad \text{et} \quad F_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

sont respectivement intégrables sur X_1 et X_2 respectivement et on a :

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_1} F_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} F_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

autrement dit :

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Démonstration. *On décompose f en f^+ et f^- et on applique le théorème de Fubini-Tonelli. à chacune des ces deux fonctions.* □

Remarque 5.2.5

1. Pour montrer l'intégrabilité d'une fonction mesurable $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$, très souvent on applique en premier le théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$ pour montrer que l'intégrale de $|f|$ sur $X_1 \times X_2$ est finie. Ensuite seulement, on applique le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale de f sur $X_1 \times X_2$.
2. Si $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ avec f_1 et f_2 intégrables sur X_1 et X_2 respectivement (on dit que x_1 et x_2 sont des variables séparées), alors :

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_1} f_1(x_1)\ d\mu_1(x_1) \times \int_{X_2} f_2(x_2)\ d\mu_2(x_2)$$

Exemples 5.2.6

1. Centre d'inertie. Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, son centre d'inertie (isobarycentre) est le point de coordonnées $\dfrac{1}{\lambda_d(K)} \displaystyle\int_K x_k\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d$ pour $k = 1, \ldots, d$.
   Par exemple, soit $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-t)^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque centré en $(t, 0)$ de rayon

1, pour $t \in]0;2]$, et soit

$$K_t = D_0 \setminus \mathring{D}_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, (x-t)^2+y^2 \geq 1\}.$$

En utilisant les symétries, son aire est

$$\begin{aligned}
\lambda_2(K_t) &= \lambda_2(D_0) - \lambda_2(D_0 \cap D_t) = \pi - \iint_{D_0\cap D_t} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; \pi - 4\int_{\frac{t}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \pi - 4\int_{\frac{t}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \pi - 4\int_{\arcsin\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \;=\; \pi - 2\int_{\arcsin\frac{t}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta \\
&= t\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} + 2\arcsin\frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, son centre d'inertie est de la forme $\big(x_t, 0\big)$ où :

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{1}{\lambda_2(K_t)}\iint_{K_t} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\lambda_2(K_t)}\left(\iint_{D_0} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_0\cap D_t} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_2(K_t)}\iint_{D_0\cap D_t} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{4}{\lambda_2(K_t)}\int_{\frac{t}{2}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\lambda_2(K_t)}\int_{\frac{t}{2}}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{\lambda_2(K_t)}\Big[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{\frac{t}{2}}^{1} \;=\; \frac{4}{3\lambda_2(K_t)}\Big(1-\frac{t^2}{4}\Big)^2
\end{aligned}$$

2. L'intégrale de Dirichlet. Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}\sin x$. Cette fonction est mesurable car continue, et elle est intégrable sur $D_M = [0;M] \times \mathbb{R}_+$ pour tout $M \in \mathbb{R}_+$ car en vertu du théorème de Fubini-Tonelli :

$$\forall (x,y) \in D_M\ |f(x,y)| \leq x\mathrm{e}^{-xy} \quad \text{et} \quad \int_{D_M} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^M\left(\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = M < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini ; d'une part :

$$\int_{D_M} \sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^M\left(\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_{D_M} \sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^M \sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left[\int_0^M \mathrm{e}^{x(\mathrm{i}-y)}\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-My}(\cos M + y\sin M)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Dès que $M \geq 1$ on a : $\forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \dfrac{1-\mathrm{e}^{-My}(\cos M + y\sin M)}{1+y^2} \leq \dfrac{3}{1+y^2}$.
La fonction $y \mapsto \frac{3}{1+y^2}$ est intégrable et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-My}(\cos M + y\sin M)}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}$. Ainsi, en utilisant le théorème de convergence dominée, on a :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{M\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-My}(\cos M + y\sin M)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$$

d'où l'intégrale (semi-convergente) de Dirichlet :

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{D_M} \sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Attention : la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$: bien qu'on l'utilise comme telle, l'intégrale de Dirichlet n'est pas une vraie intégrale (au sens de Lebesgue), ce n'est qu'une limite d'intégrales.

5.3 Le théorème de changement de variable

Lemme 5.3.1: **Mesure image**

Soit $h : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ une application mesurable et μ une mesure sur $(X, \mathscr{A})$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \nu : & \mathscr{B} & \to & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & B & \mapsto & \nu(B) = \mu\big(h^{-1}(B)\big) \end{array}$$

est une mesure sur $(Y, \mathscr{B})$ notée $\nu = \mu \circ h^{-1}$ où $h_*(\mu)$ et appelée mesure image. De plus $f : Y \to \mathbb{R}$ est intégrable pour $\mu \circ h^{-1}$ si et seulement si $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{d}\mu \circ h^{-1}(y) = \int_X f\big(h(x)\big)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Démonstration. *La définition de ν est consistante : pour tout $B \in \mathscr{B}$, $h^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. Comme $h^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $\nu(\varnothing) = 0$. Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathscr{B}$ alors $\big(h^{-1}(B_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints de $\mathscr{A}$. La σ additivité de ν se déduit alors immédiatement de celle de μ.*
Si f est l'indicatrice d'un sous ensemble B dans $\mathscr{B}$, la formule intégrale traduit simplement le fait que $\nu(B) = \mu\big(h^{-1}(B)\big)$. En effet, il suffit de remarquer que $\mathbb{1}_B \circ h(x) = \mathbb{1}_{h^{-1}(B)}(x)$:

$$\int \mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \nu(B) = \mu\big(h^{-1}(B)\big) = \int \mathbb{1}_{h^{-1}(B)}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \mathbb{1}_B\big(h(x)\big)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Le lemme se démontre alors en reprenant la construction de l'intégrale. □

Théorème 5.3.2: Changement de variable dans $\mathbb{R}^d$

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $H : V \to U$ un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive (respectivement intégrable) sur U. Alors la fonction $(f \circ H) \cdot |\operatorname{Jac}(H)|$ est mesurable positive (respectivement intégrable) sur V et :

$$\int_U f(y)\; d\lambda_d(y) = \int_V f \circ H(x) |\operatorname{Jac}(H)(x)|\; d\lambda_d(x) = \int_V f \circ H(x) \left| \left| \frac{DH}{Dx}(x) \right| \right| d\lambda_d(x)$$

où $\operatorname{Jac}(H)(x) = \left| \dfrac{DH}{Dx}(x) \right| = \det(dH_x)$ est le jacobien de H en x.

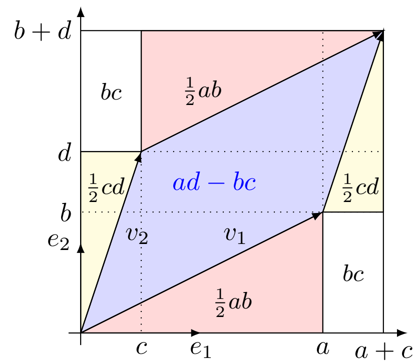
Voir la démonstration (page 111)
(en dimension 1 seulement).

Remarque 5.3.3

1. Si $d = 1$ et f est Riemann-intégrable et si $H : \overline{V} = [\alpha; \beta] \to \overline{U} = [a; b]$ est un difféomorphisme alors
   – ou bien H est croissante et donc $H' > 0$, $H(\alpha) = a$ et $H(\beta) = b$ d'où en posant $y = H(x)$
   $$\int_\alpha^\beta f \circ H(x) H'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{[\alpha;\beta]} f \circ H(x) |H'(x)|\, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[a;b]} f(y)\, \mathrm{d}\lambda(y) = \int_a^b f(y)\, \mathrm{d}y$$
   – ou bien H est décroissante et donc $H' < 0$, $H(\alpha) = b$ et $H(\beta) = a$ d'où en posant $y = H(x)$
   $$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f \circ H(x) H'(x)\, \mathrm{d}x &= -\int_{[\alpha;\beta]} f \circ H(x) |H'(x)|\, \mathrm{d}\lambda(x) = -\int_{[b;a]} f(y)\, \mathrm{d}\lambda(y) \\ &= -\int_b^a f(y)\, \mathrm{d}y = \int_a^b f(y)\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$
   On retrouve bien le changement de variable de l'intégrale de Riemann.
2. On rappelle que si H est un difféomorphisme et $y = H(x)$ alors
   $$\operatorname{Jac}(H^{-1})(y) = \Big(\operatorname{Jac}(H)(x)\Big)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Jac}(H)(x)}$$
   Ainsi, si $g = (f \circ H) \cdot |\operatorname{Jac}(H)|$ est intégrable sur V, en appliquant le théorème avec le changement de variable inverse $H^{-1} : U \to V$, on déduit que $f = (g \circ H)^{-1} \cdot |\operatorname{Jac}(H^{-1})|$ est intégrable sur U, et les deux intégrales coïncident. Ainsi, il peut parfois être judicieux d'appliquer un changement de variable pour montrer l'intégrabilité d'une fonction.
3. Rappelons qu'en algèbre linéaire, le déterminant $\det_{\mathscr{E}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ d'un système de vecteurs

$(v_1, \dots v_n)$ exprimés dans une base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ peut s'interpréter comme le volume du parallélépipède formé de ces vecteurs (avec le signe $\pm$ selon l'orientation), le volume unité étant celui de donné par $\mathscr{E}$.
cf. ci-contre en dimension $n = 2$:

$$ad - bd = (a+c)(b+d) - ab - cd - 2bc.$$



Si $H(x) = L(x) + b$ est une bijection affine de $\mathbb{R}^d$ ($L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linéaire inversible et $b \in \mathbb{R}^d$), et si P est un pavé de $\mathbb{R}^d$ alors la formule de changement de variable dit simplement que :

$$\lambda_d\big(H(P)\big) = \lambda_d\big(L(P)\big) = \int \mathbb{1}_P \circ L(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x) = \det L \cdot \int \mathbb{1}_P(y)\,\mathrm{d}\lambda_p(y) = \det L \cdot \lambda_d(P).$$

En fait, la démonstration de la formule de changement de variables est basée sur ce résultat (qui lui se démontre facilement, en utilisant la propriétés de σ-additivité de la mesure). On démontre ensuite la formule de changement de variable affine pour des fonctions indicatrices, puis des fonctions étagées mesurables positives, puis les fonctions mesurables positives et enfin pour des fonctions intégrables.
On passe ensuite aux changements de variables quelconques en utilisant le fait que tout changement de variable $H : V \to U$ peut être approximé localement (dans des pavés assez petits) par sa partie affine : $H(x) = H(x_0) + dH_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$, x au voisinage de x_0.
En recouvrant V par des pavés de plus en plus petits et en utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient la formule. La démonstration est assez technique.

Exemple 5.3.4

Calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. On passe en dimension 2 puis on utilise le théorème de Fubini-Tonelli, le théorème de changement de variables, et l'identification entre l'intégrale de Riemann généralisée et de Lebesgue pour les fonctions continues :

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \left[-\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 2\pi\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.
En exercice : retrouver le calcul du volume de la boule bordée par la sphère euclidienne de rayon R centrée à l'origine (en dimension 3) au moyen d'un changement de variable en coordonnées sphériques ($x = R\cos\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\cos\varphi$, $z = R\sin\varphi$, $\theta \in]-\pi;\pi[$ $\varphi \in]-\pi/2;\pi/2[$).

5.4 Exemples classiques

5.4.1 les fonctions gamma et bêta d'Euler

On définit les deux fonctions suivantes, d'une et de deux variables réelles respectivement, par des formules intégrales

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. **La fonction gamma.**
   (a) Domaine de définition : la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \gamma(x,t) = \gamma_x(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ est positive continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc intégrable sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$;
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2} = 0$, donc il existe $M_x \geq 1$ tel que $t \mapsto \gamma_x(t)$ est majorée sur $[M_x;+\infty[$ par la fonction intégrable $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$;
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \gamma_x(t)$ est équivalente à $t \mapsto t^{x-1}$ en 0^+. Aussi, en vertu de la règle de Riemann, pour qu'elle soit intégrable sur tout intervalle $]0;a] \subset \mathbb{R}_+^*$, il faut et il suffit que $x > 0$.

   Ces trois points prouvent l'intégrabilité de $t \mapsto \gamma_x(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$.

   (b) Limite en 0^+ et en $+\infty$. On a $\lim_{x\to0^+}\Gamma(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty$.
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0.
   Les fonctions $t \mapsto \gamma_{x_n}(t) = \mathrm{e}^{(x_n-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$, $n \in \mathbb{N}$ sont positives. De plus, sur l'intervalle $]0;1]$, elles forment une suite qui croît vers la fonction $t \mapsto \gamma_0(t) = \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-t}$ dont l'intégrale sur $]0;1]$ vaut $+\infty$. En vertu du théorème de Beppo Levi

$$\lim_{n\to+\infty}\Gamma(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+^*}\gamma(x_n,t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to+\infty}\int_{]0;1]}\gamma(x_n,t)\,\mathrm{d}t = \int_{]0;1]}\gamma(0,t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

   Ceci étant vrai pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui décroît vers 0, on a bien $\lim_{x\to0^+}\Gamma(x) = +\infty$.

   De même, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui croît vers ∞.
   Les fonctions $t \mapsto \gamma_{y_n}(t) = \mathrm{e}^{(y_n-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ $n \in \mathbb{N}$ sont positives. De plus, sur $]1;+\infty[$, elles forment une suite qui croît vers la fonction $t \mapsto +\infty$ dont l'intégrale sur $]1;+\infty[$ vaut bien évidemment $+\infty$. Ainsi, d'après le théorème de Beppo Levi

$$\lim_{n\to+\infty}\Gamma(y_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+^*}\gamma(y_n,t)\,\mathrm{d}t \geq \lim_{n\to+\infty}\int_{]1;+\infty[}\gamma(y_n,t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

   Ceci étant vrai pour tout suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs qui croît vers $+\infty$, on a bien

$$\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty.$$

(c) La fonction gamma est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $(x,t) \mapsto \gamma(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ par rapport à x est :

$$\frac{\partial^n \gamma}{\partial x^n}(x,t) = (\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \qquad \Big(\text{car } \gamma_x(t) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}\Big).$$

Pour $0 < a < x$ et $0 < t \leq 1$ on a

$$\left|\frac{\partial^n \gamma}{\partial x^n}(x,t)\right| = |\ln t|^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq |\ln t|^n t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} |\ln t|^n t^{a-1} = 0$, la fonction $t \mapsto |\ln t|^n t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0;1]$.
Pour $0 < x < b < +\infty$ et $1 \leq t$ on a

$$\left|\frac{\partial^n \gamma}{\partial x^n}(x,t)\right| = (\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq (\ln t)^n t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} (\ln t)^n t^{b-1}\mathrm{e}^{-t/2} = 0$, la fonction $t \mapsto (\ln t)^n t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi, pour tout intervalle $]a;b[\subset \mathbb{R}_+^*$, et pour chaque $x \in]a;b[$ la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n\gamma}{\partial x^n}(x,t)$ est dominée par

$$t \mapsto |\ln t|^n t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\mathbb{1}_{]0;1]}(t) + (\ln t)^n t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(t)$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et indépendante de x). D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, (en faisant une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$), la fonction Γ est dérivable à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ sur $]a;b[$, de dérivée

$$\frac{\mathrm{d}^n\Gamma}{\mathrm{d}x^n}(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\partial^n \gamma}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+^*} (\ln t)^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(d) La fonction gamma est même analytique (développable en série entière) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x_0 > 0$, on a le développement en série entière de $t \mapsto \gamma(x,t)$ par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

$$\gamma(x,t) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t} = \gamma(x_0,t)\mathrm{e}^{(x-x_0)\ln t} = \gamma(x_0,t)\sum_{n\geq 0}\frac{(\ln t)^n}{n!}(x-x_0)^n.$$

Si $|x - x_0| \leq a < x_0$ alors on a les majoration

$$\forall t \geq 1 \quad \sum_{n\geq 0}\left|\frac{(\ln t)^n}{n!}(x-x_0)^n\right| \leq t^a \qquad \forall t \in]0;1] \quad \sum_{n\geq 0}\left|\frac{(\ln t)^n}{n!}(x-x_0)^n\right| \leq t^{-a}.$$

Or la fonction

$$t \mapsto \Big(t^{-a}\mathbb{1}_{]0;1]}(t) + t^a\mathbb{1}_{]1;+\infty]}(t)\Big)\gamma(x_0,t) = \Big(t^{x_0-a-1}\mathbb{1}_{]0;1]}(t) + t^{x_0+a-1}\mathbb{1}_{]1;+\infty]}(t)\Big)\mathrm{e}^{-t}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (mêmes arguments que le domaine de définition de Γ). Par conséquent, en vertu du corollaire du théorème de convergence dominée pour les séries, pour $|x-x_0| \leq a < x_0$ on a convergence de la série

$$\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*}\gamma(x,t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}_+^*}(\ln t)^n\gamma(x_0,t)\,\mathrm{d}t\,(x-x_0)^n$$

cela pour tout $a \in]0;x_0[$. Cette série a donc un rayon de convergence au moins égal à x_0, donc égal à x_0.

(e) La fonction gamma prolonge la factorielle sur les entiers naturels.
Pour $x > 0$ on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Il suffit de faire une intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\Big]_{t\to 0^+}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

De plus $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.
On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

2. **La fonction bêta.**

(a) La fonction B est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et symétrique.
La fonction $t \mapsto \beta_{x,y}(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue positive sur $]0;1[$ équivalente à $t \mapsto t^{x-1}$ en 0^+ et $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ en 1^-. En vertu de la règle de Riemann, pour que cette fonction soit intégrable sur $]0;1[$ il faut et il suffit que $x > 0$ et $y > 0$. En changeant t en $1-t$ dans l'intégrale, on obtient $B(x,y) = B(y,x)$.

(b) La fonction gamma et la fonction bêta sont liées par la relation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Soient x et y deux réels strictement positifs. Appliquons le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}_+^*} u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \int_{\mathbb{R}_+^*} v^{y-1}\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} u^{x-1}v^{y-1}\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v.$$

On effectue le changement de variables $s = u+v, t = \frac{u}{u+v}$.
L'application $\varphi : (u,v) \mapsto \left(u+v, \frac{u}{u+v}\right)$ est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0;1[$, de réciproque $\varphi^{-1} : (s,t) \mapsto (st, s(1-t))$. De plus ces deux applications sont $\mathscr{C}^\infty$ en tant que fractions rationnelles et

$$\mathrm{Jac}_{(s,t)}\,\varphi^{-1} = \begin{vmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{vmatrix} = -s$$

Il vient alors :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}_+^*\times]0;1[} (st)^{x-1}\big(s(1-t)\big)^{y-1}\mathrm{e}^{-s}s\,\mathrm{d}s\otimes\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+^*\times]0;1[} s^{x+y-1}\mathrm{e}^{-s}t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}s\otimes\mathrm{d}t.$$

Appliquons à nouveau le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}_+^*} s^{x+y-1}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \int_{]0;1[} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x+y)B(x,y).$$

Les démonstrations du chapitre 5

Lemme: Mesure de sections horizontales et verticales

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies. On munit $X_1 \times X_2$ de la tribu produit $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$. Soit $E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$.

1. *Pour tout $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$, les "sections horizontales et verticales"*

$$H_{a_2}(E) = \{x \in X_1 : (x, a_2) \in E\} \qquad \text{et} \qquad V_{a_1}(E) = \{y \in X_2 : (a_1, y) \in E\}$$

   sont mesurables dans $(X_1, \mathscr{M}_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2)$ respectivement ;

2. *les applications "mesures de sections horizontales et verticales"*

$$v_E : \begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ a_1 & \longmapsto & \mu_2\big(V_{a_1}(E)\big) \end{array} \qquad \text{et} \qquad h_E \ \begin{array}{ccc} X_2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ a_2 & \longmapsto & \mu_1\big(H_{a_2}(E)\big) \end{array}$$

   sont mesurables.

Démonstration. *Retour page 96*

Idées principales.

1. *Dans le cas où les singletons de X_1 et X_2 sont mesurables, le résultat est immédiat : les sections $H_{a_2}(E) \times \{a_2\} = E \cap (X_1 \times \{a_2\})$ et $\{a_1\} \times V_{a_1}(E) = E \cap (\{a_2\} \times X_2)$ sont mesurables pour la tribu $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$.*
   Dans le cas général, on montre que pour tout $a_1 \in X_1$ et tout $a_2 \in X_2$, les ensembles

$$\{E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2 : V_{a_1}(E) \in \mathscr{M}_2\} \quad \text{et} \quad \{E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2 : H_{a_2}(E) \in \mathscr{M}_1\}$$

   sont des tribus sur $X_1 \times X_2$ contenues dans $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$, qui contiennent $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$. Elles sont donc égales à $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$.

2. *On montre que les ensembles*

$$\Big\{E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2 : v_E : x \mapsto \mu_2\big(V_x(E)\big)\Big\} \quad \text{et} \quad \Big\{E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2 : h_E : y \mapsto \mu_1\big(H_y(E)\big)\Big\}$$

   sont des λ systèmes, contenant le π-système générateur $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$. On applique alors le lemme π-λ de Dynkin.

$\square$

Théorème: Mesure produit

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies. On munit $X_1 \times X_2$ de la tribu produit $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$.

1. *Il existe une unique mesure μ telle que*

$$\forall A_1 \times A_2 \in \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2 \qquad \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

   Cette mesure est également σ-finie et on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$.

2. *Pour tout $E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$*

$$\begin{aligned} \mu(E) \;=\; \int_{X_1 \times X_2} \mathbb{1}_E \, \mathrm{d}\mu \;&=\; \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \mathbb{1}_E(x,y) \, \mathrm{d}\mu_2(y) \right) \mathrm{d}\mu_1(x) \\ &=\; \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \mathbb{1}_E(x,y) \, \mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_2(y). \end{aligned}$$

Démonstration. *Retour page 96*

— ***Unicité***. *Soient $(X_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes de $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ respectivement, telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} \mu_1(X_{1,n}) < +\infty \\ \mu_2(X_{2,n}) < +\infty \end{cases} \qquad \text{et} \quad X_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} X_{1,n} \qquad X_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} X_{2,n}.$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu_1(X_{1,n})\mu_2(X_{2,n}) < +\infty \qquad \text{et} \quad X_1 \times X_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} X_{1,n} \times X_{2,n}.$$

Donc si une telle mesure existe elle est σ-finie et on peut appliquer le théorème d'unicité des mesures.

— ***Existence***. *Les formules intégrales nous assurent l'existence de la mesure μ : définissons μ par*

$$\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2\big(V_x(E)\big) \, \mathrm{d}\mu_1(x).$$

Cette définition a un sens en vertu du lemme 5.1.3.

— *si E est un produit ($E = E_1 \times E_2 \in \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$), on a évidemment $V_x(E) = \varnothing$ si $x \notin E_1$ et $V_x(E) = E_2$ si $x \in E_1$ donc*

$$\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2\big(V_x(E)\big) \, \mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{X_1} \mu_2(E_2)\mathbb{1}_{E_1}(x) \, \mathrm{d}\mu_1(x) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2).$$

— *μ est bien une mesure. Si $E = \varnothing = \varnothing \times \varnothing$, on obtient bien $\mu(\varnothing) = 0$. La σ-additivité est une conséquence de la σ-additivité de μ_2 et du théorème de Beppo Levi : si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* *une suite d'ensembles deux à deux disjoints dans $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$, alors :*

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) &= \int_{X_1} \mu_2\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} V_x(E_n)\Big)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{X_1} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2\big(V_x(E_n)\big)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{X_1} \mu_2\big(V_x(E_n)\big)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

— *De même, la formule*

$$\forall E \in \mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2 \quad \mu'(E) = \int_{X_2} \mu_1\big(H_y(E)\big)\,\mathrm{d}\mu_2(y)$$

définit une autre mesure sur $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$ qui coïncide avec μ sur $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$, donc lui est égale en vertu de l'unicité.

$\square$

Théorème: Théorème de Fubini-Tonelli.

Soient $(X_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures σ-finies. Soit $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. On regarde f comme fonction de deux variables $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Alors :

1. *pour presque tout $a_1 \in X_1$ et presque tout $a_2 \in X_2$, les fonctions*

$$\begin{array}{rccc} f(\cdot, a_2) : & X_1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & x_1 & \longmapsto & f(x_1, a_2) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} f(a_1, \cdot) : & X_2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ & x_2 & \longmapsto & f(a_1, x_2) \end{array}$$

   sont mesurables positives sur X_1 et X_2 respectivement ;
2. *les fonctions $F_1 : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et $F_2 : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définies par :*

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \quad \text{et} \quad F_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

   sont mesurables positives sur X_1 et X_2 respectivement ;
3. *On a égalité des trois intégrales :*

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_1} F_1(x_1)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} F_2(x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

   autrement dit :

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Démonstration. *Retour page 97*
La démonstration repose sur la construction de l'intégrale. Quitte à compléter la fonction f par 0 là où elle n'est pas définie, on peut suppose f définie partout.

1. *Soit $(a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Notons $E = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f(x_1, x_2) \le t\}$. D'après le lemme 5.1.3, les ensembles*

$$\{x_1 \in X_1 : f(x_1, a_2) \le t\} \qquad \text{et} \qquad \{x_2 \in X_2 : f(a_1, x_2) \le t\}$$

   sont mesurables dans X_1 et X_2 respectivement. Ainsi, $f(\cdot, a_2)$ et $f(a_1, \cdot)$ sont mesurables.
2. *et 3. Si f est l'indicatrice d'un ensemble mesurable, le résultat provient du lemme 5.1.3. La linéarité de l'intégrale nous donne le résultat dans le cas où f est étagée, mesurable positive, puis le théorème d'approximation 2.4.12 et le théorème de Beppo Levi donnent le résultat final pour toute f mesurable positive.*

□

Théorème: Changement de variable dans $\mathbb{R}^d$

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $H : V \to U$ un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur U. Alors la fonction $(f \circ H) \cdot |\operatorname{Jac}(H)|$ est intégrable sur V et :

$$\int_U f(y)\ d\lambda_d(y) = \int_V f \circ H(x) |\operatorname{Jac}(H)(x)|\ d\lambda_d(x) = \int_V f \circ H(x) \left| \left| \frac{DH}{Dx}(x) \right| \right| d\lambda_d(x)$$

où $\operatorname{Jac}(H)(x) = \left| \frac{DH}{Dx}(x) \right| = \det(dH_x)$ *est le jacobien de H en x.*

Démonstration. *Retour page 102* *(en dimension 1 seulement)*
Quitte à changer H en $-H$, on peut supposer que $H :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ est croissante. On considère l'application : $\mu : \mathscr{B}(]a;b[) \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mu(A) = \int_{]a;b[} \mathbb{1}_{H^{-1}(A)}(x) H'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{]a;b[} \mathbb{1}_A \circ H(x) H'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

C'est la mesure image par H de la mesure à densité $H'\lambda$, autrement dit $\mu = (H'\lambda) \circ H^{-1}$. On montre qu'elle coïncide avec λ sur les intervalles fermés, qui forment un π-système générateur de $\mathscr{B}(]a;b[)$: si $[s;t] \subset]a;b[$, alors $H^{-1}([s;t]) = [H^{-1}(s); H^{-1}(t)]$ d'où

$$\mu([s;t]) = \int_{]a;b[} \mathbb{1}_{[H^{-1}(s);H^{-1}(t)]}(x) H'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{H^{-1}(s)}^{H^{-1}(t)} H'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = t - s = \lambda([s;t]).$$

Ainsi d'après le théorème d'unicité des mesures, on a $\mu = \lambda$. La formule de changement de variable est traduction de l'égalité de ces mesures pour l'intégration :

$$\int f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int f(y)\,\mathrm{d}\big((H'\lambda) \circ H^{-1}\big)(y) = \int f\big(H(x)\big)\,\mathrm{d}(H'\lambda)(x) = \int f\big(H(x)\big) H'(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

□