Précision sur le lien entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

- l'intégrale de Riemann n'est définie que **pour un segment** (= un intervalle fermé borné = un intervalle compact) $[a; b]$.
- les intégrales généralisées (ou impropres), définies à partir de l'intégrale de Riemann ne sont que **des limites d'intégrales**, ce ne sont pas des intégrales de Riemann à *proprement* parler d'où la terminologie "*intégrales impropres*", à opposer aux intégrales au sens *propre* du terme.
- il existe deux types d'intégrales impropres (convergentes) : celles qui **convergent absolument** et celles qui convergent "mal" (pas absolument) : on dit **semi-convergentes**.

<u>La différence fondamentale entre les deux est la suivante</u>.
Supposons pour fixer les idées que l'on s'intéresse à une intégrale impropre en $+\infty$

$$J = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Si on découpe $\mathbb{R}_+$ en une union dénombrable d'intervalles $I_n = [a_n; b_n]$ qui ne chevauchent pas (sauf éventuellement au bord), alors d'après la relation de Chasles, **si l'intégrale est convergente**, la série

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t \right)$$

converge vers

$$J = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

- **Si l'intégrale I converge absolument** alors la série S est absolument convergente car
  $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|\mathrm{d}t \ = \int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t$$
  et donc cette somme **ne dépend pas de l'ordre des termes** : elle est commutativement convergente. En d'autres termes, **l'intégrale de f est indépendante de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en tant que domaine d'intégration !** Ce comportement est en fait semblable à celui d'une intégrale de Riemann (sur un compact). Cela signifie qu'on peut considérer cette intégrale comme une vraie intégrale, généralisant l'intégrale de Riemann. Certains auteurs qualifient d'*intégrable (au sens de Riemann généralisé)* une telle fonction f.
- En revanche, **si l'intégrale J ne converge pas absolument** alors on peut trouver une suite d'intervalles $I_n = [a_n; b_n]$ telle que la série S **n'est pas commutativement convergente** ce qui veut dire que l'intégrale de f **dépend de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$** ! **On ne peut donc pas la voir comme une vraie intégrale, mais seulement une limite d'intégrales**
  $$J = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{la notation} \qquad \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{est abusive !}$$
  C'est le cas par exemple de
  $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \ = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + n\pi}\mathrm{d}u$$
  qui a le même comportement que la série
  $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{car} \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\mathrm{d}u \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$
  Bien qu'on ait convergence de l'intégrale, on ne pas qualifier d'*intégrable* une telle fonction f, même au sens « *Riemann généralisé* ».

- Maintenant, toute fonction localement Riemann intégrable (c'est à dire Riemann intégrable sur tout segment $[a;b]$) qui a une intégrale impropre **absolument convergente** sur un intervalle généralisé $I =]\alpha;\beta[$ (ou encore $[\alpha;\beta[$, $]\alpha;\beta]$, $[\alpha;\beta]$, $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$) de $\mathbb{R}$ est intégrable au sens Lebesgue sur I et on a égalité :

$$\underset{\text{(Riemann)}}{\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t} \quad = \quad \underset{\text{(Lebesgue)}}{\int_I f\mathrm{d}\lambda}$$

  C'est une conséquence du fait qu'une intégrale de Riemann peut être vue comme une intégrale de Lebesgue, et du théorème de Beppo-Levi.

  En fait, **l'intégrale de Lebesgue ne tient pas du tout compte de la relation d'ordre sur** $\mathbb{R}$ en tant que domaine d'intégration. Dans le cours, on a d'ailleurs défini directement cette intégrale sur $\mathbb{R}^d$ qui n'est pas ordonné. Ce qui explique le lien avec les intégrales absolument convergentes.

- **Une intégrale impropre semi-convergente (au sens de Riemann) reste une intégrale semi-convergente au sens de Lebesgue**, c'est-à-dire une limite d'intégrales de Lebesgue :

$$J = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\ \mathrm{dt} = \lim_{x\to+\infty} \int_{[0;x]} f\mathrm{d}\lambda$$

  On ne peut pas rendre absolument convergent quelque chose qui ne l'était pas avant !

  Par exemple, $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ **n'est pas Lebesgue intégrable sur** $\mathbb{R}_+$, pas plus qu'elle n'était Riemann intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (même au sens de Riemann généralisé). Cependant :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_{[0;x]} f\mathrm{d}\lambda = \frac{\pi}{2}.$$