L3 - Calcul intégral
TD - Exercices de révision.

Exercice 1 (*convergence uniforme, bosse glissante*). On considère la suite de fonctions $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = n(1-x)^n \sin \frac{\pi x}{2}.$$

1. Soit $x_n \in [0,1]$ défini par $f_n(x_n) = \sup_{[0,1]} f_n(x)$. Montrer que x_n est caractérisé par
$$\tan \frac{\pi x_n}{2} = \frac{\pi}{2n}(1-x_n) \text{ et } 0 < x_n < 1.$$
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$.
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour $x \in [0,1]$. En déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) sur tout intervalle $[a,b] \subseteq]0,2[$. Cette convergence est-elle uniforme sur $]0,2[$? (on pourra étudier sur $]0,1]$ et en déduire le comportement sur $[1,2[$).

Exercice 2 (*convergence d'intégrales, critères classiques*). Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$

Exercice 3 (*convergence uniforme et intégrale impropre*). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

On définit également $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que pour tout réel positif x, $|f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{1}{ne}$.
2. A l'aide de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, calculer l'***intégrale de Gauss*** : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$. On pourra pour cela :
   (a) poser $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x^2)\,\mathrm{d}x$ et montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I$;
   (b) montrer que $I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}$, où W_n est la n-ième ***intégrale de Wallis*** ;
   (c) puis conclure en utilisant la propriété connue : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 4 (*séries de fonctions et intégrales impropres*).

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, la série de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{1-t}$.
2. En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
3. (QUESTION DIFFICILE, un bon challenge !) Montrer que
$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},$$
après avoir préalablement montré la convergence de l'intégrale et de la série.